

# Applications des immeubles en théorie des représentations

Stéphane Gaussent, Nicole Bardy, Cyril Charignon et Guy Rousseau

23 juillet 2010

## 1 Introduction

Ce rapport a pour but d'exposer le lien entre la théorie des représentations d'un groupe semi-simple et la géométrie d'un immeuble affine. Celui-ci est en fait associé au groupe semi-simple dual de Langlands du précédent. Comme nous parlerons plus de cette géométrie, on privilégie ce dernier groupe dans les notations qui suivent.

$G$	groupe semi-simple sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ , associé à $(X, Y, \Phi, \Phi^\vee)$
$T$	tore maximal dans $G$
$X$	réseau des caractères de $T$
$Y$	réseau des cocaractères de $T$
$\Phi$	système de racines de $(G, T)$ , contenu dans $X$ et supposé irréductible
$\{\alpha_i\}_{i \in I}$	un choix de racines simples dans $\Phi$
$P^\vee$	réseau des copoids, dual de $Q = \oplus \mathbb{Z}\alpha_i$
$\Phi^\vee$	système des coracines de $(G, T)$ , contenu dans $Y$
$Q^\vee$	réseau des coracines de $G$ , $Q^\vee = \oplus \mathbb{Z}\alpha_i^\vee \subset Y \subset P^\vee$
$G^\vee$	dual de Langlands de $G$ , groupe semi-simple complexe associé à $(Y, X, \Phi^\vee, \Phi)$
$V(\lambda)$	représentation irréductible de $G^\vee$ de plus haut poids $\lambda \in Y^+ = \{\lambda \in Y \mid \alpha_i(\lambda) \geq 0\}$
$\mathcal{I}$	immeuble de Bruhat-Tits associé à $G$ et au corps des séries de Laurent $\mathcal{K} = \mathbb{C}((t))$

Nous reprenons ici, en grande partie, les exposés d'un groupe de travail qui a eu lieu à Nancy en 2008-2009 sur le théorème de «saturation». Ce théorème a été démontré par Kapovich et Millson [12], à la suite d'une série d'articles avec Leeb ([9], [10], [11],...); il s'énonce comme suit :

**Théorème 1.1.** *On note  $k = k_\Phi$  le plus petit multiple commun des coefficients de la plus grande racine de  $\Phi$ . Soient  $\lambda, \mu$  et  $\nu$  des copoids dominants tels que  $\lambda + \mu + \nu \in Q^\vee$ . S'il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $(V(N\lambda) \otimes V(N\mu) \otimes V(N\nu))^{G^\vee} \neq \{0\}$  alors  $(V(k^2\lambda) \otimes V(k^2\mu) \otimes V(k^2\nu))^{G^\vee} \neq \{0\}$ .*

La conjecture qu'ils formulent est que le résultat reste vrai si on remplace  $k^2$  par  $k$  et même si on le remplace par 1 ou 2, selon que les racines de  $\Phi$  sont toutes de même longueur ou non. Pour  $G$  de type  $A$ ,  $k = 1$  et on a bien une saturation du cône de Littlewood-Richardson (formé des  $(\lambda, \mu, \nu)$  tels que  $(V(\lambda) \otimes V(\mu) \otimes V(\nu))^{G^\vee} \neq \{0\}$ ). Dans ce cas-là, le résultat a été démontré par Knutson et Tao avec le modèle du nid d'abeilles [13].

L'importance de ce théorème tient au fait que la non nullité de  $(V(\lambda') \otimes V(\mu') \otimes V(\nu'))^{G^\vee}$  traduit l'existence d'une sous-représentation de  $V(\lambda') \otimes V(\mu')$  isomorphe au dual  $V(\nu'^*)$  de  $V(\nu')$  et la multiplicité de  $V(\nu'^*)$  est la dimension de cet espace. On a donc ainsi des renseignements sur la décomposition en facteurs irréductibles du produit tensoriel de ces deux représentations irréductibles.

**Esquisse de la preuve.** En gros, la preuve se décanule en les points suivants :

**Étape 1)**  $(V(N\lambda) \otimes V(N\mu) \otimes V(N\nu))^{G^\vee} \neq \{0\}$  implique qu'il existe un triangle (géodésique)  $T(0, A, B)$  dans  $\mathcal{I}$ , de longueurs de côtés  $N\lambda, N\mu, N\nu$ .

**Étape 2)** Il existe une application, appelée «application de Gauss», qui à  $T(0, A, B)$  associe une configuration semi-stable  $((N\lambda, \xi_1), (N\mu, \xi_2), (N\nu, \xi_3))$  de points pondérés de  $\partial_\infty \mathcal{I}$  (le bord visuel de  $\mathcal{I}$ ).

**Étape 3)** L'ensemble des configurations semi-stables est saturé, ainsi  $((\lambda, \xi_1), (\mu, \xi_2), (\nu, \xi_3))$  est toujours semi-stable. On veut maintenant inverser l'application de Gauss. Pour cela on construit à partir de  $((\lambda, \xi_1), (\mu, \xi_2), (\nu, \xi_3))$  une application  $\phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ . En fait, on montre qu'il existe un point fixe noté  $x_0$  de  $\phi$ , d'où un triangle  $T(x_0, x_1, x_2)$  dans  $\mathcal{I}$ , de longueurs de côtés  $\lambda, \mu, \nu$ .

**Étape 4)** La condition  $\lambda + \mu + \nu \in Q^\vee$  implique que  $x_0, x_1, x_2$  sont des sommets de  $\mathcal{I}$ . On rétracte dans un appartement contenant  $x_0$  et par rapport à une alcôve  $\mathfrak{a}$  qui contient ce point. On dilate par  $k$ , les sommets deviennent des sommets spéciaux et on obtient un polygone  $P(0, a, a_1, \dots, a_n, b, 0)$  formé de deux segments  $[0, a]$  et  $[b, 0]$  de longueurs de côtés  $k\lambda$  et  $k\nu$  et d'une ligne brisée qui est en fait un chemin de Hecke par rapport à  $\mathfrak{a}$  de type  $k\mu$ .

**Étape 5)** On replie ce polygone dans la chambre fondamentale, ce qui en donne un formé par les segments  $[0, k\lambda]$ ,  $[0, k\nu^*]$  et un chemin de Hecke de type  $k\mu$  contenu dans la chambre fondamentale (ici,  $\nu^* = -w_0\nu$ ). Malheureusement, un chemin de Hecke n'est pas forcément LS. Mais, modulo un petit ajustement, en dilatant de nouveau, on arrive à un chemin LS. On conclut par un théorème de Littelmann que  $(V(k^2\lambda) \otimes V(k^2\mu) \otimes V(k^2\nu))^{G^\vee} \neq \{0\}$ .

Les exposés qui suivent s'inspirent largement de [12]. La section 2 introduit les notions de chemins LS et Hecke dues à Littelmann et Kapovich-Millson, et explique leur importance en théorie des représentations. Dans la section 3, non essentielle pour le théorème de saturation, on interprète dans l'immeuble  $\mathcal{I}$ , grâce à des galeries dites LS, les cycles de Mirković-Vilonen qui interviennent également en théorie des représentations, cf. [7]. La section 4 fournit une preuve originale (entièrement immobilière) d'une caractérisation par Kapovich et Millson des images dans  $\mathbb{A}$  des triangles géodésiques de  $\mathcal{I}$  par certaines rétractions ; on en déduit l'étape 1) ci-dessus. Dans la section 5 on introduit le bord visuel de  $\mathcal{I}$  et la notion de configuration semi-stable ; on définit l'application de Gauss et on montre qu'elle a un point fixe ; ce sont les étapes 2) et 3). On conclut enfin, dans la dernière section, après avoir accompli les étapes 4) et 5).

La section 1 est l'exposé introductif de S. Gaussent, la section 2 correspond à des exposés de N. Bardy et G. Rousseau. La section 3 est un exposé, plus ancien, de S. Gaussent. La section 4 regroupe des exposés de C. Charignon avec des compléments finaux de S. Gaussent. Enfin les sections 5 et 6 correspondent respectivement à des exposés de S. Gaussent et de G. Rousseau.

## 2 Différentes définitions des chemins LS

### 2.1 Appartement dans $\mathcal{I}$

On note  $\mathbb{A}$  l'appartement témoin dans  $\mathcal{I}$ , il s'agit d'un espace affine euclidien sous  $V = Y_{\mathbb{R}} = Y \otimes \mathbb{R}$  (souvent identifié à  $V$ ). De plus, on désigne par  $C^v = \{x \in V \mid \alpha_i(x) \geq 0, \forall i \in I\}$  la chambre de Weyl fondamentale; la plupart des notions introduites ci-dessous dépendent du choix de cette chambre. Le groupe de Weyl fini  $W^v$  agit isométriquement sur  $V$  avec  $C^v$  comme domaine fondamental. Il est engendré par les réflexions  $r_\alpha$ , pour  $\alpha \in \Phi$ , où  $r_\alpha$  est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan  $\text{Ker} \alpha$  (mur vectoriel).

Pour tout  $v \in V$ , il existe un unique  $v_0 \in C^v \cap W^v v$ , on définit la projection sur  $C^v$  en posant  $v_0 = pr_{C^v}(v)$ . Si  $v \in C^v$ , on note  $v^* = pr_{C^v}(-v) = -w_0.v$  (si  $w_0$  est l'élément de plus grande longueur de  $W^v$ ). De plus, pour tous  $x, y \in \mathbb{A}$ , on pose  $d_{C^v}(x, y) = pr_{C^v}(y - x) \in C^v$ . On dit que  $d_{C^v}(x, y)$  est la longueur du segment orienté  $[x, y]$ .

L'ensemble  $\mathcal{M}$  des murs de  $\mathbb{A}$  est en bijection avec  $\Phi \times \mathbb{Z}$ , il s'agit des hyperplans

$$M(\alpha, k) = \{x \in \mathbb{A} \mid \alpha(x) + k = 0\}.$$

La réflexion  $s_M = s_{\alpha, k}$  associée au mur  $M = M(\alpha, k)$  respecte l'ensemble  $\mathcal{M}$  des murs et ces réflexions engendrent le groupe de Weyl affine :  $W^a = W^v \ltimes Q^\vee$ . Un mur de  $\mathbb{A}$  détermine deux demi-espaces fermés de  $\mathbb{A}$  (appelés demi-appartements) dont il constitue le bord.

Une alcôve dans  $\mathbb{A}$  est l'adhérence d'une composante connexe du complémentaire des murs; c'est un domaine fondamental pour l'action de  $W^a$ . Un sommet de  $\mathcal{A}$  est un sommet  $x$  d'une alcôve, il est spécial si,  $\forall \alpha \in \Phi$ , on a  $\alpha(x) \in \mathbb{Z}$  (i.e. si  $x \in P^\vee$ ).

On sera amené plus tard à considérer des appartements construits comme ci-dessus, en remplaçant  $\mathbb{Z}$  par un autre sous-groupe discret de  $\mathbb{R}$ , par exemple  $\{0\}$ . Dans ce dernier cas,  $W^a = W^v$ , l'appartement est dit vectoriel et ses alcôves sont aussi ses chambres de Weyl.

### 2.2 Chemins polygonaux parcourus à vitesse constante

Si  $\lambda \in C^v$ , un  $\lambda$ -chemin ou un chemin de type  $\lambda$  est un chemin linéaire par morceaux  $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}$  tel que pour tout  $t$  (sauf un nombre fini),  $pr_{C^v}(\pi'(t)) = \lambda$ . Les dérivées à droite et à gauche en  $t$ ,  $\pi'_+(t)$  et  $\pi'_-(t)$  existent tout le temps, mais sont parfois non identiques. La somme des longueurs des segments constituant le  $\lambda$ -chemin  $\pi$  est  $\lambda$ . Dans Kapovich et Millson, un tel chemin s'appelle un chemin billard (voir paragraphe 2.5).

Un  $\lambda$ -chemin s'écrit  $\pi(\lambda, \pi_0, \mathbf{w}, \mathbf{a})$ , où  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m) \in (W^v)^m$ ,  $\mathbf{a} = (a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_m = 1)$  et

$$\pi(t) = \pi_0 + \sum_{i=1}^{j-1} (a_i - a_{i-1}) w_i(\lambda) + (t - a_{j-1}) w_j(\lambda)$$

si  $a_{j-1} \leq t \leq a_j$ .

### 2.3 Galeries

Les chambres de Weyl de  $V$  sont les transformées de  $C^v$  par  $W^v$ . Une cloison est une facette de codimension 1 d'une chambre, son type est l'élément  $i \in I$  tel qu'elle soit conjuguée par  $W^v$  à  $C^v \cap \text{Ker} \alpha_i$ . Deux chambres sont dites mitoyennes si elles ont une cloison en commun (elles peuvent être égales).

Une galerie de chambres de  $C$  à  $C'$  est une suite  $\Gamma = (C_0 = C, C_1, \dots, C_n = C')$  de chambres telle que  $C_{i-1}$  et  $C_i$  soient mitoyennes, pour  $1 \leq i \leq n$ . Cette galerie est dite minimale ou tendue si la longueur  $n$  est minimale ; alors  $n$  est la distance de  $C$  à  $C'$ . La suite des types de cloisons dans  $C_{i-1} \cap C_i$  est un type de cette galerie. Plier  $\Gamma$  (au niveau  $j$ ), c'est avoir  $C_{j-1} \neq C_j$  et remplacer  $C_j, \dots, C_n$  par leurs images par la réflexion par rapport au mur (vectoriel) contenant la cloison  $C_{j-1} \cap C_j$ .

Comme une alcôve est un domaine fondamental pour  $W^a$ , toutes les définitions précédentes peuvent être répétées pour les alcôves. On définit ainsi dans  $\mathbb{A}$  des cloisons d'alcôve et des galeries d'alcôves. Dans ce cadre les types correspondent aux cloisons d'une alcôve fondamentale ; comme  $\Phi$  est irréductible, ils sont indexés par  $I \cup \{0\}$ .

## 2.4 Ordre de Bruhat-Chevalley

Le groupe  $W^v$  est un groupe de Coxeter pour le système de générateurs  $\{r_i = r_{\alpha_i} \mid i \in I\}$ . Tout  $w \in W^v$  peut se décomposer sous la forme  $w = r_{i_1} \dots r_{i_n}$  ; la longueur  $\ell(w)$  de  $w$  est le minimum des  $n$  possibles, une décomposition avec  $\ell(w)$  termes est alors dite réduite.

On a le résultat classique suivant.

**Proposition 2.1.** *Dans  $W^v$ , les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $w' \leq w$  (ordre de Bruhat-Chevalley) ;
2. il existe une suite  $w' = w_0, w_1, \dots, w_n = w$  et des racines  $\beta_i$  tels que  $w_{i+1} = w_i r_{\beta_i}$  et  $\ell(w_{i+1}) > \ell(w_i)$  ;
3. idem avec les  $r_{\beta_i}$  à gauche ;
4. idem avec  $\ell(w_{i+1}) = \ell(w_i) + 1$  ;
5.  $w'$  est le produit d'une sous-expression d'une décomposition réduite de  $w$  ;
6. il existe une galerie minimale de  $C^v$  à  $wC^v$  qui donne une galerie de  $C^v$  à  $w'C^v$  par des pliages successifs.

On définit un ordre dans  $W^v/W_\lambda^v$ , où  $W_\lambda^v = \{w \in W^v \mid w(\lambda) = \lambda\} = \langle r_{\alpha_i} \mid \alpha_i(\lambda) = 0 \rangle$ . Etant donnée une classe  $\tilde{w}$ , il existe un unique  $\tilde{w}_0 \in \tilde{w}$  de longueur minimale notée  $\ell_\lambda(\tilde{w})$ . On a  $\tilde{w}_0 \leq w$ , pour tout  $w \in \tilde{w}$  et même  $w = \tilde{w}_0 u$ ,  $u \in W_\lambda^v$  avec  $\ell(w) = \ell(\tilde{w}_0) + \ell(u)$ . De plus,  $\tilde{w}_0 C^v$  est la projection de  $C^v$  sur  $\tilde{w}\lambda$ , i.e. la chambre contenant  $\tilde{w}\lambda$  la plus proche de  $C^v$ . On définit

$$\tilde{w}' \leq \tilde{w} \quad \text{par} \quad \tilde{w}'_0 \leq \tilde{w}_0 .$$

**Proposition 2.2.** *les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\tilde{w}' \leq \tilde{w}$  ;
2.  $\exists w \in \tilde{w}, \exists w' \in \tilde{w}', w' \leq w$  ;
3. il existe une galerie minimale de  $C^v$  à  $\tilde{w}\lambda$  qui donne une galerie de  $C^v$  à  $\tilde{w}'\lambda$  par des pliages successifs.

La preuve est laissée à la sagacité du lecteur.

## 2.5 Les chemins à la Kapovich et Millson

Un chemin  $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}$  est un vrai billard si  $\pi$  est linéaire par morceaux et si, pour tout  $t$ ,  $\pi'_+(t) \in W_{\pi(t)}^v \pi'_-(t)$ , où  $W_{\pi(t)}^v = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Phi, \alpha(\pi(t)) \in \mathbb{Z} \rangle$ . Un chemin qui est un vrai billard est un  $\lambda$ -chemin pour  $\lambda = pr_{C^v}(\pi'_\pm(t))$ .

Si  $\pi$  est un  $\lambda$ -chemin, on note  $w_\pm(t)$  l'élément de  $W^v$  de plus petite longueur tel que  $\pi'_\pm(t) = w_\pm(t)\lambda$ . Le chemin linéaire par morceaux  $\pi$  est plié positivement si, pour tout  $t$ , il existe une  $W^v$ -chaîne de  $\pi'_-(t)$  à  $\pi'_+(t)$ , c'est-à-dire qu'il existe une suite de vecteurs  $\pi'_-(t) = \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m = \pi'_+(t)$  et des racines positives  $\beta_1, \dots, \beta_m$  telles que

$$(H1) \quad r_{\beta_i}(\eta_{i-1}) = \eta_i$$

$$(H2) \quad \beta_i(\eta_{i-1}) < 0.$$

**Lemme 2.3.** *Un  $\lambda$ -chemin  $\pi$  est plié positivement si, et seulement si, pour tout  $t$ ,  $w_+(t) \leq w_-(t)$ .*

*Démonstration.* On a  $\eta_0 = \pi'_-(t) = w_-(t)\lambda$  et  $\eta_i = w_i\lambda$ , où on a posé  $w_i = r_{\beta_i} \cdots r_{\beta_1} w_-(t)$ . Or  $\beta_i(\eta_{i-1}) < 0$  implique que  $\beta_i(w_{i-1}C^v) \leq 0$  ce qui équivaut à  $\ell(w_i = r_{\beta_i} w_{i-1}) < \ell(w_{i-1})$ . Donc  $w_-(t) = w_0 > w_1 > \cdots > w_m \geq w_+(t)$  car  $\pi'_+(t) = w_m\lambda$ .

Réciproquement, si  $w_+(t) \leq w_-(t)$ , d'après l'une des caractérisations de l'ordre de Bruhat, il existe des racines positives  $\beta_1, \dots, \beta_m$  telles que si on pose  $w_0 = w_-(t)$ ,  $\eta_0 = \pi'_-(t)$  et, pour  $1 \leq i \leq m$ ,  $w_i = r_{\beta_i} \cdots r_{\beta_1} w_-(t)$ ,  $\eta_i = w_i\lambda$ , on a  $w_m = w_+(t)$ ,  $\eta_m = \pi'_+(t)$  et  $\ell(w_i) < \ell(w_{i-1})$ . D'où, (H1).

Pour (H2),

$$\ell(r_{\beta_i} w_{i-1}) < \ell(w_{i-1}) \Rightarrow \beta_i(w_{i-1}C^v) \leq 0 \Rightarrow \beta_i(\eta_{i-1}) \leq 0.$$

Si c'est une inégalité stricte, c'est bon. Sinon,  $\eta_{i-1} = \eta_i$  et on oublie  $i$  dans la liste. □

Un chemin linéaire par morceaux  $\pi$  est de Hecke (par rapport à  $-C^v$ ) si, pour tout  $t$ , il existe une  $W_{\pi(t)}^v$ -chaîne de  $\pi'_-(t)$  à  $\pi'_+(t)$ , c'est à dire une  $W^v$ -chaîne comme ci-dessus vérifiant de plus :

$$(H3) \quad r_{\beta_i} \in W_{\pi(t)}^v, \text{ i.e. } \beta_i(\pi(t)) \in \mathbb{Z} : \pi(t) \text{ est dans un mur de direction } \text{Ker } \beta_i.$$

Alors, Hecke implique vrai billard et plié positivement, mais la réciproque est fausse en général (on peut trouver un contre-exemple en type  $G_2$ ). Si les points anguleux de  $\pi$  sont des sommets spéciaux, la condition (H3) est automatiquement vérifiée ; alors billard et plié positivement impliquent Hecke.

## 2.6 Les chemins LS

Un chemin de *Lakshmibai-Seshadri* (ou *LS*) de type  $\lambda \in C^v$  est un  $\lambda$ -chemin  $\pi = \pi(\lambda, \pi_0, \mathbf{w}, \mathbf{a})$  tel que : pour tout  $j = 1, \dots, m-1$ , il existe une  $a_j$ -chaîne de  $w_j$  à  $w_{j+1}$  i.e. il existe une suite  $\beta_{j,1}, \dots, \beta_{j,s_j}$  de racines positives telle que, si on pose  $\sigma_{j,0} = w_j$ ,  $\sigma_{j,1} = r_{\beta_{j,1}} w_j, \dots, \sigma_{j,s_j} = r_{\beta_{j,s_j}} \cdots r_{\beta_{j,1}} w_j$ , on a  $\sigma_{j,s_j} = w_{j+1}$  et

$$(LS0) \quad \pi_0 \text{ est un sommet spécial (i.e. } \pi_0 \in P^\vee) \text{ et } \lambda \in P^{\vee+} = P^\vee \cap C^v.$$

$$(LS1) \quad \sigma_{j,i} < \sigma_{j,i-1}, \quad \text{dans } W^v/W_\lambda^v;$$

$$(LS2) \quad a_j \beta_{j,i}(\sigma_{j,i}(\lambda)) \in \mathbb{Z};$$

**(LS3)**  $\ell_\lambda(\sigma_{j,i}) = \ell_\lambda(\sigma_{j,i-1}) - 1$ .

En fait, Littelmann ([14], [15]) considère des chemins LS normalisés, i.e. avec  $\pi_0 = 0$ .

**N.B.** 1) **(LS0) + (LS2)**  $\Rightarrow a_j \in \mathbb{Q}$  (si  $w_j \neq w_{j-1}$ ).

2) On sait que  $\pi(1) - \pi(0) - \lambda \in -Q^{\vee+} = -\sum \mathbb{N}\alpha_i^\vee$ .

**Proposition 2.4.** *Si (LS0) est vérifié alors  $(LS1) + (LS2) \iff$  Hecke.*

La preuve de cette proposition se trouve dans [8].

## 2.7 Les opérateurs $e_\alpha$ et $f_\alpha$

Soient  $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}$  un chemin linéaire par morceaux d'origine  $\pi(0) = 0$  et  $\alpha$  une racine simple.

On considère  $Q = \text{Inf}(\alpha \circ \pi([0, 1]) \cap \mathbb{Z})$ . Si  $Q = 0$ , le chemin  $e_\alpha \pi$  n'est pas défini. Si  $Q < 0$ , soient  $q = \text{Inf}\{t \in [0, 1] \mid \alpha \circ \pi(t) = Q\}$  et  $y = \text{Sup}\{t \in [0, q] \mid \alpha \circ \pi(t) = Q + 1\}$ ; le chemin  $e_\alpha \pi$  est la concaténation de  $\pi|_{[0,y]}$ , d'un symétrique de  $\pi|_{[y,q]}$  et d'un translaté de  $\pi|_{[q,1]}$ . Plus précisément  $e_\alpha \pi(t) = \pi(t)$  pour  $t \in [0, y]$ ,  $e_\alpha \pi(t) = s_{\alpha, Q+1}(\pi(t))$  pour  $t \in [y, q]$  et  $e_\alpha \pi(t) = \pi(t) - \pi(q) + e_\alpha \pi(q)$  pour  $t \in [q, 1]$ .

De même on considère la partie entière  $P$  de  $\alpha \circ \pi(1) - Q$ . Si  $P \leq 0$ , le chemin  $f_\alpha \pi$  n'est pas défini. Si  $P \geq 1$ , soient  $p = \text{Sup}\{t \in [0, 1] \mid \alpha \circ \pi(t) = Q\}$  et  $x = \text{Inf}\{t \in [p, 1] \mid \alpha \circ \pi(t) = Q + 1\}$ ; le chemin  $f_\alpha \pi$  est la concaténation de  $\pi|_{[0,p]}$ , d'un symétrique de  $\pi|_{[p,x]}$  et d'un translaté de  $\pi|_{[x,1]}$ . Plus précisément  $f_\alpha \pi(t) = \pi(t)$  pour  $t \in [0, p]$ ,  $f_\alpha \pi(t) = s_{\alpha, Q}(\pi(t))$  pour  $t \in [p, x]$  et  $f_\alpha \pi(t) = \pi(t) - \pi(x) + f_\alpha \pi(x)$  pour  $t \in [x, 1]$ .

On a les propriétés assez faciles suivantes :

- Si  $e_\alpha \pi$  est défini, on a  $e_\alpha \pi(1) = \pi(1) + \alpha^\vee$ .
- Si  $f_\alpha \pi$  est défini, on a  $f_\alpha \pi(1) = \pi(1) - \alpha^\vee$ .
- $(e_\alpha)^n \pi$  est défini si et seulement si  $n \leq -Q$ .
- $(f_\alpha)^n \pi$  est défini si et seulement si  $n \leq P$ .
- Si  $\pi(1) \in P^\vee$ , on a  $P + Q = \alpha(\pi(1))$ .
- $e_\alpha \pi = \pi' \iff f_\alpha \pi' = \pi$
- Si  $\pi([0, 1]) \subset C^v$ , aucun  $e_\alpha \pi$  n'est défini.

On notera l'analogie des propriétés 3, 4 et 5 avec celles des bases des représentations de  $SL_2$ .

Pour  $\lambda \in P^{\vee+}$ , soit  $\pi_\lambda$  le segment  $[0, \lambda]$ , i.e.  $\pi_\lambda(t) = t\lambda$ . On montre alors le résultat, plus difficile, suivant [14] :

**Proposition 2.5.** *Un chemin  $\pi$  d'origine 0 est un chemin LS (normalisé) de type  $\lambda$  si et seulement si on peut l'écrire sous la forme  $\pi = f_{\beta_1} f_{\beta_2} \dots f_{\beta_r} \pi_\lambda$  avec  $r \in \mathbb{N}$  et  $\beta_1, \dots, \beta_r$  des racines simples.*

## 2.8 Application aux représentations de $G^\vee$

Soit  $\lambda \in Y^+ = Y \cap C^v$ . La représentation irréductible de plus haut poids  $\lambda$  est de dimension finie. L'action du tore maximal  $T^\vee$  de  $G^\vee$  est diagonalisable avec des poids  $\mu \in \lambda - \sum_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i^\vee$  (contenu dans le réseau  $Y$  des caractères de  $T^\vee$ ). Il est important de connaître les poids qui interviennent et leur multiplicité, c'est ce que donne le théorème suivant [14].

**Théorème 2.6** (Formule des caractères de Littelmann). *La multiplicité de  $\mu$  dans  $V(\lambda)$  est le nombre de chemins LS (normalisés) de type  $\lambda$  et d'extrémité  $\mu$ .*

La formule des caractères de Weyl, précédemment connue, a le désavantage d'exprimer la multiplicité comme une somme d'entiers relatifs, ce qui rend plus difficile de voir si elle est non nulle.

Le théorème suivant de Littelmann [14] est fondamental pour la preuve du théorème de saturation.

**Théorème 2.7** (Règle de décomposition à la Littlewood-Richardson). *Soient  $\lambda, \mu$  et  $\nu$  des copoids dominants de  $G$  (i.e. des éléments de  $Y^+ \subset P^{V+}$ ). Alors,  $(V(\lambda) \otimes V(\mu) \otimes V(\nu))^{G^\vee} \neq \{0\}$  si, et seulement si, il existe un chemin LS normalisé  $\pi$  de type  $\mu$  tel que  $\lambda + \pi(1) = \nu^*$  et, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\lambda + \pi(t) \in C^v$ .*

**N.B.** Dans ce cas on a donc  $\lambda + \mu + \nu \in Q^\vee$ .

### 3 Chemins LS et Cycles de Mirković-Vilonen

#### 3.1 Grassmannienne affine et cycles de Mirković-Vilonen

Le corps  $\mathcal{K} = \mathbb{C}((t))$  est complet pour la valuation (discrète) des séries de Laurent formelles, son anneau d'entiers est  $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[t]]$  et son corps résiduel  $\mathbb{C}$ .

On considère le groupe algébrique semi-simple complexe  $G$ , son tore maximal  $T$ , le normalisateur de celui-ci  $N$  et son sous-groupe de Borel  $B$  (associé à  $T$  et aux racines simples  $\alpha_i$ ). On note  $B^-$  le sous-groupe de Borel opposé et  $U$  (resp.  $U^-$ ) le radical unipotent de  $B$  (resp.  $B^-$ ); on a  $B = T \ltimes U$ ,  $B^- = T \ltimes U^-$  et  $U \cap U^- = \{1\}$ . On peut considérer les points de  $G, T, B, B^-, \dots$  dans toute  $\mathbb{C}$ -algèbre. En particulier  $G(\mathcal{K})$  et  $G(\mathcal{O})$  sont des ind-schémas en groupes sur  $\mathbb{C}$ .

La grassmannienne affine est  $\mathcal{G} = G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O})$ , c'est une ind-variété sur  $\mathbb{C}$ .

On suppose en fait, dans cette section,  $G$  simplement connexe, donc  $Y = Q^\vee$  et  $T = Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ . Pour  $\lambda \in Y$ , on note  $t^\lambda = t \otimes \lambda \in Y \otimes \mathcal{K} = T(\mathcal{K}) \subset G(\mathcal{K})$ . Ainsi  $Q^\vee$  s'identifie à un sous-groupe de  $T(\mathcal{K})$  et on a  $T(\mathcal{K}) = Q^\vee \ltimes T(\mathcal{O})$ , donc  $Q^\vee \cap G(\mathcal{O}) = \{1\}$  :  $Q^\vee$  se plonge dans  $\mathcal{G}$ .

On considère l'orbite  $\mathcal{G}_\lambda = G(\mathcal{O}).t^\lambda$  de  $t^\lambda$  sous  $G(\mathcal{O})$  dans  $\mathcal{G}$ ; comme  $G(\mathcal{O})$  contient  $N$  qui agit sur  $Q^\vee$  comme  $W^v$ , on peut supposer, sans changer  $\mathcal{G}_\lambda$ , que  $\lambda \in Q^{\vee+} = Y^+$ . La décomposition de Bruhat  $G(\mathcal{K}) = G(\mathcal{O})T(\mathcal{K})G(\mathcal{O})$  montre que  $\mathcal{G}$  est réunion disjointe des  $\mathcal{G}_\lambda$  pour  $\lambda \in Y^+$ . L'adhérence  $\overline{\mathcal{G}}_\lambda$  de  $\mathcal{G}_\lambda$  dans  $\mathcal{G}$  est en fait une variété algébrique complexe projective de dimension  $(2\lambda, \rho)$  où  $\rho$  est la demi-somme des racines positives de  $\Phi$  ( $\rho \in X$ , dual de  $Y$ ).

Pour  $\mu \in Y$ , on peut aussi considérer l'orbite  $S_\mu^- = U^-(\mathcal{K}).t^\mu$  de  $t^\mu$  sous  $U^-(\mathcal{K})$  dans  $\mathcal{G}$ . La décomposition d'Iwasawa  $G(\mathcal{K}) = U^-(\mathcal{K})T(\mathcal{K})G(\mathcal{O})$  nous dit que  $\mathcal{G}$  est réunion disjointe des  $S_\mu^-$  pour  $\mu \in Y$ . On note  $S_{\lambda, \mu} = S_\mu^- \cap \mathcal{G}_\lambda \subset \mathcal{G}$ , c'est une variété algébrique complexe. Mirković et Vilonen ont montré (voir [16]) que toutes les composantes irréductibles de  $S_{\lambda, \mu}$  sont de dimension  $(\lambda + \mu, \rho)$ .

Les cycles de Mirković-Vilonen sont les composantes irréductibles de l'adhérence  $\overline{S}_{\lambda, \mu}$  de  $S_{\lambda, \mu}$  dans  $\mathcal{G}$ , ils ont donc pour dimension  $(\lambda + \mu, \rho)$ .

Ces cycles fournissent une autre formule des caractères : la multiplicité de  $\mu$  dans la représentation  $V(\lambda)$  de  $G^\vee$  est le nombre de composantes irréductibles de  $\overline{S}_{\lambda,\mu}$ .

On va faire le lien avec les chemins LS et la formule des caractères de Littelmann (Théorème 2.6). Pour cela on va utiliser l'immeuble de Bruhat-Tits  $\mathcal{I}$  de  $G$  sur  $\mathcal{K}$  et on commence par rappeler quelques résultats sur les immeubles affines.

### 3.2 Immeubles affines

Un immeuble affine (ou vectoriel) est un espace métrique  $\mathcal{I}$  recouvert par une famille de sous-espaces appelés appartements, tous isométriques à l'appartement témoin  $\mathbb{A}$  du paragraphe 2.1 par une isométrie unique à  $W^a$  près. Les alcôves de l'immeuble sont les alcôves de ses appartements. L'axiome fondamental suivant est satisfait :

Deux alcôves de l'immeuble sont contenues dans un même appartement et cet appartement est unique à un isomorphisme fixant (point par point) les deux alcôves près.

Si  $\mathfrak{a}$  est une alcôve dans un appartement  $A$  de  $\mathcal{I}$ , pour tout  $x \in \mathcal{I}$ , il existe un appartement  $B$  contenant  $\mathfrak{a}$  et  $x$  et un isomorphisme  $\varphi$  de  $B$  sur  $A$  fixant  $\mathfrak{a}$ . L'élément  $\varphi(x) \in A$  ne dépend pas des choix de  $B$  et  $\varphi$ , on le note  $\rho_{A,\mathfrak{a}}(x)$ . L'application  $\rho_{A,\mathfrak{a}} : \mathcal{I} \rightarrow A$  est la rétraction de  $\mathcal{I}$  sur  $A$  de centre  $\mathfrak{a}$ ; elle diminue les distances, conserve les types et transforme une galerie (d'alcôves) en une autre galerie.

L'enclos  $cl(\Omega)$  d'une partie  $\Omega$  d'un appartement  $A$  est l'intersection des demi-appartements de  $A$  contenant  $\Omega$ . L'intersection de deux appartements  $A, B$  est close (i.e. égale à son enclos) et les deux appartements sont isomorphes par un isomorphisme fixant leur intersection. Une galerie minimale dans un appartement reste dans l'enclos de ses extrémités; ainsi dans l'immeuble une galerie minimale est dans tout appartement contenant ses extrémités.

Un demi-appartement  $D$  de mur  $M = \partial D$  et une alcôve  $\mathfrak{a}$  dont une cloison est dans  $M$  sont toujours contenus dans un même appartement.

L'immeuble  $\mathcal{I}$  est dit épais si toute cloison est contenue dans au moins 3 chambres. C'est vérifié pour l'immeuble de  $G$  sur  $\mathcal{K}$ , plus précisément dans ce cas, l'ensemble des alcôves contenant une cloison donnée d'une alcôve  $\mathfrak{a}_0$  (mais différentes de  $\mathfrak{a}_0$ ) est paramétré par  $\mathbb{C}$ .

Pour plus de détails sur les immeubles affines, on pourra se référer à [1], [4] ou [17].

### 3.3 Germes de quartier

Un quartier dans  $\mathbb{A}$  est un sous-ensemble de la forme  $\mathfrak{Q} = x + C$  pour un point  $x \in \mathbb{A}$  (son sommet) et une chambre de Weyl  $C \subset V$  (sa direction). Deux quartiers sont équipollents si et seulement si leur intersection contient un autre quartier. Les classes d'équivalence sont les germes de quartier, elles sont en bijection avec les chambres de Weyl de  $V$ .

On a donc une notion de quartier ou de germe de quartier dans l'immeuble  $\mathcal{I}$ . Les immeubles de Bruhat-Tits, qui nous intéressent, ont deux propriétés particulières :

Deux germes de quartier sont toujours contenus dans un même appartement (contenir un germe de quartier signifie contenir l'un des quartiers du germe). Cela permet de montrer que ces germes constituent l'ensemble des chambres d'un immeuble sphérique  $\mathcal{I}^s$  (au sens de [18]). On reviendra sur  $\mathcal{I}^s$  à la section 5 (sous le nom  $I_\infty$ ).

Un germe de quartier et une alcôve sont toujours contenus dans un même appartement (c'est une conséquence de la décomposition d'Iwasawa). Comme dans le paragraphe précédent cela permet de définir une rétraction  $\rho_{A,\mathfrak{q}}$  de l'immeuble sur un appartement  $A$  de centre un



germe de quartier  $\mathfrak{q}$  contenu dans  $A$ . Cette rétraction aussi diminue les distances, conserve les types et transforme les galeries (d'alcôves) en galeries.

### 3.4 L'immeuble $\mathcal{I}$ de $G$ sur $\mathcal{K}$

Le groupe  $G(\mathcal{K})$  agit sur cet immeuble par des isométries permutant les appartements et tous les isomorphismes d'appartements évoqués ci-dessus peuvent être choisis induits par un élément de  $G(\mathcal{K})$ , cf. [5] et [6].

1) Les appartements de  $\mathcal{I}$  sont en bijection  $G(\mathcal{K})$ -équivariante avec les tores maximaux déployés de  $G$  sur  $\mathcal{K}$ . L'appartement fondamental (identifié à  $\mathbb{A}$ ) est associé à  $T$ , il est stable par le normalisateur  $N(\mathcal{K})$ . On suppose  $G$  simplement connexe, donc  $N(\mathcal{K})$  agit sur  $\mathbb{A}$  par des éléments de  $W^a = W^v \ltimes Q^\vee$  (en général il faut considérer  $W^v \ltimes Y$ ) ; en fait, pour  $\mu \in Q^\vee$ ,  $t^\mu$  agit par la translation de vecteur  $\mu \in V = Y \otimes \mathbb{R}$ . Ainsi  $G(\mathcal{K})$  permute les alcôves, quartiers, germes de quartiers, ...

2) Le fixateur du sommet spécial  $0 \in \mathbb{A}$  est  $G(\mathcal{O})$ . Ainsi la grassmannienne affine  $\mathcal{G} = G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O})$  s'identifie à l'orbite de  $0$  dans  $\mathcal{I}$ , c'est l'ensemble des sommets (spéciaux) de type  $0$  de  $\mathcal{I}$ .

L'ensemble des sommets (spéciaux) de type  $0$  de  $\mathbb{A}$  est  $Q^\vee = Y$ , ses orbites sous  $N(\mathcal{O})$  ont pour système de représentants  $Y^+$ . La variété  $\mathcal{G}_\lambda$  est l'orbite dans  $\mathcal{I}$  sous  $G(\mathcal{O})$  du sommet  $\lambda \in Y^+$ .

3) Si  $\mathfrak{q}$  est un germe de quartier, son stabilisateur  $G(\mathcal{K})_{\mathfrak{q}}$ , ensemble des éléments de  $G(\mathcal{K})$  transformant un quartier de  $\mathfrak{q}$  en un (autre) quartier de  $\mathfrak{q}$ , est un sous-groupe de Borel de  $G(\mathcal{K})$ . En fait  $\mathcal{I}^s$  est l'immeuble de Tits de  $G$  sur  $\mathcal{K}$  dont les facettes correspondent aux paraboliques.

Le germe de quartier  $\mathfrak{q}(C^v)$ , de direction  $C^v$  dans  $\mathbb{A}$ , a pour stabilisateur  $B(\mathcal{K})$ . Son fixateur, ensemble des éléments fixant (point par point) un quartier de ce germe, est  $U(\mathcal{K})T(\mathcal{O})$ . Le groupe  $T(\mathcal{O})$  est le fixateur de  $\mathbb{A}$ .

De même le germe de quartier  $\mathfrak{q}(-C^v)$  de direction  $-C^v$  a pour stabilisateur  $B^-(\mathcal{K})$  et pour fixateur  $U^-(\mathcal{K})T(\mathcal{O})$ . On considère la rétraction  $\rho_{-\infty} = \rho_{\mathbb{A}, \mathfrak{q}(-C^v)}$ . Si  $x \in \mathbb{A}$ , son image réciproque par  $\rho_{-\infty}$  est l'orbite de  $x$  sous  $U^-(\mathcal{K})$ .

4) Pour  $\lambda \in Y^+$  et  $\mu \in Y$ , on peut donc réinterpréter  $S_{\lambda, \mu}$  dans l'immeuble : c'est l'ensemble des sommets de  $\mathcal{G}_\lambda = G(\mathcal{O})\lambda$  dont l'image par  $\rho_{-\infty}$  est  $\mu$ .

On va faire le lien avec les chemins LS ou plutôt avec des galeries LS que l'on va définir. Pour simplifier, on suppose  $\lambda$  régulier (i.e.  $(\lambda, \alpha) \neq 0, \forall \alpha \in \Phi$ ) ; sinon, il faut, soit considérer des galeries de suites de faces d'alcôves, cf. [7], Section 4, soit, changer un peu les définitions de galeries LS, cf [2], Section 5.2.

### 3.5 Galeries associées à un copoids $\lambda$

Soit  $\lambda \in Y_{reg}^+$ , on considère, dans  $\mathbb{A}$  une galerie minimale (d'alcôves)  $\gamma_\lambda$  joignant  $0$  à  $\lambda$ , de longueur  $p$  et de type  $t(\gamma_\lambda) = (i_1, \dots, i_p) \in (I \cup \{0\})^p$ . On note  $\mathfrak{a}_-$  l'alcôve de sommet  $0$  dans  $-C^v$ .

Entre deux sommets de  $\mathcal{I}$ , il existe au plus une galerie minimale de type  $t(\gamma_\lambda)$  et deux telles galeries de même origine sont conjuguées par le fixateur de cette origine. Ainsi  $\mathcal{G}_\lambda$  est en bijection avec l'ensemble  $\widehat{\mathcal{G}}_\lambda$  des galeries minimales  $\delta$  de  $\mathcal{I}$  d'origine contenant  $0$  et de type  $t(\gamma_\lambda)$ . A une telle galerie  $\delta = (\mathfrak{a}_0, \dots, \mathfrak{a}_p)$  on peut rajouter une galerie minimale  $(\mathfrak{a}_{-q}, \dots, \mathfrak{a}_0)$  de  $\mathfrak{a}_{-q} = \mathfrak{a}_-$  à l'origine  $\mathfrak{a}_0$  de  $\delta$ , on obtient ainsi une nouvelle galerie minimale  $\delta^*$  d'origine  $\mathfrak{a}_-$ .

Dans  $\mathbb{A}$  on considère l'ensemble  $\Gamma(\gamma_\lambda)$  des galeries de type  $t(\gamma_\lambda)$  et d'origine contenant 0. A une telle galerie  $\gamma = (\mathbf{a}'_0, \dots, \mathbf{a}'_p)$  on peut rajouter une galerie minimale  $(\mathbf{a}'_{-q}, \dots, \mathbf{a}'_0)$  de  $\mathbf{a}'_{-q} = \mathbf{a}_-$  à l'origine  $\mathbf{a}'_0$  de  $\gamma$ , on obtient ainsi une nouvelle galerie  $\gamma^*$  d'origine  $\mathbf{a}_-$ .

La rétraction  $\rho_{-\infty}$  applique évidemment  $\widehat{\mathcal{G}}_\lambda$  dans  $\Gamma(\gamma_\lambda)$ . Si  $\rho_{-\infty}(\delta) = \gamma$ , alors  $\rho_{-\infty}(\delta^*) = \gamma^*$ .

### 3.6 Plis et murs porteurs

La galerie  $\gamma = (\mathbf{a}'_0, \dots, \mathbf{a}'_p) \in \Gamma(\gamma_\lambda)$  est dite pliée positivement si, pour tout  $j \in \{1, \dots, p\}$  tel que  $\mathbf{a}'_{j-1} = \mathbf{a}'_j$ , le germe de quartier  $\mathbf{q}(-C^v)$  est séparé de  $\mathbf{a}'_j$  par le mur  $M_j$  contenant la cloison de type  $i_j$  de  $\mathbf{a}'_j$ . On note  $\Gamma^+(\gamma_\lambda)$  l'ensemble des galeries pliées positivement de  $\Gamma(\gamma_\lambda)$ .

Un mur  $M$  est porteur pour la galerie  $\gamma \in \Gamma^+(\gamma_\lambda)$  à l'étape  $j \in \{-q+1, \dots, p\}$  si l'on est dans l'un des 3 cas suivants :

- 1)  $j \leq 0$  et  $M = M_j$  sépare  $\mathbf{a}_-$  et  $\mathbf{a}'_{j-1}$  de  $\mathbf{a}'_0$  et  $\mathbf{a}'_j$  (donc  $0 \in M$ ).
- 2)  $j > 0$ ,  $\mathbf{a}'_{j-1} = \mathbf{a}'_j$  et  $M = M_j$  sépare  $\mathbf{q}(-C^v)$  de  $\mathbf{a}'_j$ .
- 3)  $j > 0$ ,  $\mathbf{a}'_{j-1} \neq \mathbf{a}'_j$  et  $M = M_j \supset \mathbf{a}'_{j-1} \cap \mathbf{a}'_j$  sépare  $\mathbf{q}(-C^v)$  et  $\mathbf{a}'_{j-1}$  de  $\mathbf{a}'_j$ .

La dimension de  $\gamma$  est le nombre  $\dim(\gamma)$  de ces paires  $(M, j)$ .

**Proposition 3.1.**  $\rho_{-\infty}(\widehat{\mathcal{G}}_\lambda) = \Gamma^+(\gamma_\lambda)$  et, pour  $\gamma \in \Gamma^+(\gamma_\lambda)$ ,  $\dim(\gamma)$  est la «dimension» de  $(\rho_{-\infty})^{-1}(\gamma)$ .

*Idée de démonstration.* Pour  $\gamma \in \Gamma(\gamma_\lambda)$ , cherchons  $\delta \in \widehat{\mathcal{G}}_\lambda$  tel que  $\rho_{-\infty}(\delta^*) = \gamma^*$ . On construit les alcôves de  $\delta^*$  de proche en proche par récurrence sur  $j \in [-q, \dots, p]$ . Supposons  $\mathbf{a}_{j-1}$  construit avec  $\rho_{-\infty}(\mathbf{a}_{j-1}) = \mathbf{a}'_{j-1}$  et cherchons  $\mathbf{a}_j$ ,  $i_j$ -mitoyenne mais différente de  $\mathbf{a}_{j-1}$  (i.e.  $\mathbf{a}_{j-1} \cap \mathbf{a}_j$  est une cloison de type  $i_j$ ), telle que  $\rho_{-\infty}(\mathbf{a}_j) = \mathbf{a}'_j$ .

Si  $\mathbf{a}'_{j-1}$  et  $\mathbf{q}(-C^v)$  sont du même côté de  $M_j$  (e.g. si  $j \leq 0$ ), alors il en est de même de  $\mathbf{a}_{j-1}$  et  $\mathbf{q}(-C^v)$  dans un appartement les contenant ; ainsi toute alcôve  $\mathbf{b}$   $i_j$ -mitoyenne mais différente de  $\mathbf{a}_{j-1}$  est dans un même appartement que  $\mathbf{a}_{j-1}$  et  $\mathbf{q}(-C^v)$ , donc  $\rho_{-\infty}(\mathbf{b}) \neq \rho_{-\infty}(\mathbf{a}_{j-1})$ . Ainsi  $\rho_{-\infty}(\widehat{\mathcal{G}}_\lambda) \subset \Gamma^+(\gamma_\lambda)$ . De plus, si  $\gamma \in \Gamma^+(\gamma_\lambda)$ , on peut choisir pour  $\mathbf{a}_j$  tous les  $\mathbf{b}$  ci-dessus, d'où un ensemble  $\mathbb{C}$  de paramètres. On est dans le cas 1) ou 3) de la définition de mur porteur.

Si  $\mathbf{a}'_{j-1}$  et  $\mathbf{q}(-C^v)$  sont de part et d'autre de  $M_j$ , il en est de même de  $\mathbf{a}_{j-1}$  et  $\mathbf{q}(-C^v)$ . Parmi les cloisons  $\mathbf{b}$   $i_j$ -mitoyennes mais différentes de  $\mathbf{a}_{j-1}$ , il y en a une  $\mathbf{b}_0$  dans le même appartement que  $\mathbf{a}_{j-1}$  et  $\mathbf{q}(-C^v)$ , son image  $\rho_{-\infty}(\mathbf{b}_0)$  est différente de  $\mathbf{a}'_{j-1}$ . Pour toutes les autres,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b}_0$  et  $\mathbf{q}(-C^v)$  sont dans un même appartement, donc  $\rho_{-\infty}(\mathbf{b}) \neq \rho_{-\infty}(\mathbf{b}_0)$  et ainsi  $\rho_{-\infty}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}'_{j-1}$ . Si le mur  $M_j$  n'est pas porteur,  $\mathbf{b}_0$  est le seul choix possible pour  $\mathbf{a}_j$ . Si le mur  $M_j$  est porteur (cas 2) de la définition) les choix possibles pour  $\mathbf{a}_j$  sont les  $\mathbf{b} \neq \mathbf{b}_0$  ; on a donc un ensemble de paramètres égal à  $\mathbb{C}^*$ .

Comme le type de  $\delta^*$  est le type d'une galerie minimale et comme les alcôves successives sont à chaque fois distinctes, il est classique que  $\delta^*$  est minimale.  $\square$

### 3.7 Galeries LS

Si  $\gamma$  est une galerie de  $\mathcal{I}$  de type  $t(\gamma_\lambda)$ , on appelle but de cette galerie le sommet de la dernière alcôve non dans la cloison de type  $i_p$ . On note  $\Gamma^+(\gamma_\lambda, \mu)$  l'ensemble des galeries de  $\Gamma^+(\gamma_\lambda)$  de but  $\mu$ . On montre dans [7]

**Proposition 3.2.** Si  $\gamma \in \Gamma^+(\gamma_\lambda, \mu)$ , alors  $\dim(\gamma) \leq (\lambda + \mu, \rho)$ .

La galerie  $\gamma \in \Gamma^+(\gamma_\lambda, \mu)$  est dite LS si  $\dim(\gamma) = (\lambda + \mu, \rho)$ . On note  $\Gamma_{LS}^+(\gamma_\lambda, \mu)$  l'ensemble de ces galeries.

Dans [7] on montre que ces galeries LS s'obtiennent à partir de  $\gamma_\lambda$  en itérant des opérateurs  $f_\alpha$  analogues à ceux de 2.7 et on prouve la formule des caractères suivante :

**Théorème 3.3.** *La multiplicité du poids  $\mu$  dans la représentation  $V(\lambda)$  de  $G^\vee$  est le nombre de galeries dans  $\Gamma_{LS}^+(\gamma_\lambda, \mu)$ .*

### 3.8 Lien avec les cycles de Mirković-Vilonen

La variété  $S_{\lambda, \mu} \subset \mathcal{G}_\lambda$  est l'ensemble des buts de galeries de  $\widehat{\mathcal{G}}_\lambda$  dont l'image par  $\rho_{-\infty}$  est  $\mu$ . Elle est donc en bijection avec  $(\rho_{-\infty})^{-1}(\Gamma_{LS}^+(\gamma_\lambda, \mu))$ , réunion des  $(\rho_{-\infty})^{-1}(\gamma)$  qui sont de dimension  $\dim(\gamma) \leq (\lambda + \mu, \rho)$ . Les composantes irréductibles de  $S_{\lambda, \mu}$  étant de dimension  $(\lambda + \mu, \rho)$ , ce sont les  $(\rho_{-\infty})^{-1}(\gamma)$  pour  $\gamma \in \Gamma_{LS}^+(\gamma_\lambda, \mu)$ . D'où le lien entre la formule des caractères du Théorème 2.6 ci-dessus et celle du paragraphe 3.1.

Dans le raisonnement approximatif précédent, on a négligé de prendre les adhérences dans  $\mathcal{G}$ . Soit  $\widehat{\Sigma}(\gamma_\lambda)$  l'ensemble de toutes les galeries (minimales ou non) dans  $\mathcal{I}$  d'origine contenant 0 et de type  $t(\gamma_\lambda)$ ; c'est une variété algébrique projective lisse. L'application «but» est bi-rationnelle d'image  $\overline{\mathcal{G}}_\lambda$  : on a une résolution des singularités de  $\overline{\mathcal{G}}_\lambda$  analogue à la variété de Bott-Samelson associée à une variété de Schubert.

Comme  $\widehat{\mathcal{G}}_\lambda$  est un ouvert de  $\widehat{\Sigma}(\gamma_\lambda)$  (défini par le fait que toutes les alcôves d'une galerie sont différentes),  $\mathcal{G}_\lambda$  est un ouvert de  $\overline{\mathcal{G}}_\lambda$  et le raisonnement approximatif ci-dessus peut être consolidé pour prouver la bijection entre les cycles de Mirković-Vilonen de  $\overline{S}_{\lambda, \mu}$  et les galeries de  $\Gamma_{LS}^+(\gamma_\lambda, \mu)$ , voir [7] et [2].

### 3.9 Lien entre galeries LS et chemins LS

On peut supposer que la galerie  $\gamma_\lambda$  contient le segment  $[0, \lambda]$ . Toute galerie  $\gamma \in \Gamma(\gamma_\lambda)$  est obtenue par une succession de pliages à partir d'une image de  $\gamma_\lambda$  par un  $w \in W^v$ , elle contient un chemin  $\pi_\gamma$  obtenu par pliage du chemin  $w\pi_\lambda$  et  $\pi_\gamma(1)$  est le but de  $\gamma$ . Comme les pliages de  $\gamma$  se font selon des murs,  $\pi_\gamma$  est un vrai billard et il est facile de voir que, si  $\gamma$  est pliée positivement, alors  $\pi_\gamma$  l'est aussi, on peut même montrer que  $\pi_\gamma$  est Hecke.

Si on appelle mur porteur pour un chemin  $\pi$  tout mur quitté positivement par  $\pi$  en  $t \in [0, 1[$  (i.e.  $\pi(t)$  est dans le mur et  $\pi(t + \varepsilon)$  est du côté positif) alors la condition **(LS3)** (de définition des chemins LS) équivaut au fait que le nombre de murs porteurs pour  $\pi$  est  $(\lambda + \pi(1), \rho)$ . Ainsi les galeries LS correspondent aux chemins LS. Ce point de vue est développé dans [8].

Dans ce cadre la Proposition 3.1 devient :

**Proposition 3.4.** *Un chemin dans  $\mathbb{A}$  est l'image par  $\rho_{-\infty}$  d'un segment de  $\mathcal{I}$  (parcouru à vitesse constante) si, et seulement si, il est de Hecke.*

La démonstration est tout à fait analogue à celle du Théorème 4.7 ci-dessous.

## 4 Pliage et dépliage de triangles

### 4.1 Du local au global

#### 4.1.1 Immeuble tangent

Dans cette partie,  $\mathcal{I}$  désigne un immeuble affine (ou vectoriel) épais général. Soit  $x \in \mathcal{I}$ , l'étoile  $x^*$  (réunion des facettes qui contiennent  $x$ ) est, comme ensemble de facettes, un immeuble combinatoire sphérique épais. Sa réalisation vectorielle, notée  $\Sigma_x(\mathcal{I})$ , est l'immeuble tangent de  $\mathcal{I}$  en  $x$ .

En fait  $\Sigma_x(\mathcal{I})$  est le quotient de  $x^* \times \mathbb{R}_+$  par la relation :  $(y, \lambda) \sim (z, \mu) \Leftrightarrow y$  et  $z$  sont dans le même segment d'origine  $x$  d'une facette de  $x^*$  et, pour  $N$  grand,  $(1 - \lambda/N)x + (\lambda/N)y = (1 - \mu/N)x + (\mu/N)z$ . On note  $\lambda \overrightarrow{xy}$  la classe de  $(y, \lambda)$ . Le point  $x$  s'identifie au point  $0 = 0_x = \lambda \overrightarrow{xx} = 0 \overrightarrow{xy}$  de  $\Sigma_x(\mathcal{I})$ .

Les appartements de  $\Sigma_x(\mathcal{I})$  sont les espaces vectoriels

$$\overrightarrow{Ax} = \{\lambda \overrightarrow{xy} \mid y \in A \cap x^*, \lambda \in \mathbb{R}_+\},$$

pour  $A$  un appartement affine contenant  $x$ . Les chambres de  $\Sigma_x(\mathcal{I})$  sont les  $\vec{c} = \{\lambda \overrightarrow{xy} \mid y \in c, \lambda \in \mathbb{R}_+\}$  pour  $c$  une alcôve de  $x^*$ . Le groupe de Weyl de  $\overrightarrow{Ax}$  est le groupe  $W_x^v$  engendré par les réflexions linéaires associées aux réflexions affines de  $A$  fixant  $x$ .

Si  $\vec{v} \in \Sigma_x(\mathcal{I})$ , alors  $x + \vec{v}$  est bien défini dans  $\mathcal{I}$  si  $\|\vec{v}\|$  est assez petit pour que  $x + \vec{v} \in x^*$ , sinon, il faut préciser un appartement  $A \ni x$  tel que  $\overrightarrow{Ax} \ni \vec{v}$ . Deux éléments  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  de  $\Sigma_x(\mathcal{I})$  sont dits opposés s'ils sont dans un même appartement  $\overrightarrow{Ax}$  et opposés dans celui-ci. On note  $\vec{v}' = op_{\overrightarrow{Ax}}(\vec{v})$ .

Si  $\pi$  est un chemin linéaire par morceaux (donc réunion de segments contenus dans des appartements), on peut définir, pour tout  $t$ , les dérivées  $\pi'_+(t)$  et  $-\pi'_-(t)$  dans  $\Sigma_{\pi(t)}\mathcal{I}$  de manière intrinsèque (i.e. indépendante du choix d'appartements). Le chemin  $\pi$  est dérivable en  $t$  si et seulement si  $\pi'_+(t)$  et  $-\pi'_-(t)$  sont opposés dans  $\Sigma_{\pi(t)}\mathcal{I}$ .

#### 4.1.2 Différentielle

Soit  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$  un morphisme d'immeubles affines. En particulier,  $f(x^*) \subset (f(x))^*$ . Pour tout  $x \in \mathcal{I}$ , on définit la différentielle de  $f$  comme étant la réalisation vectorielle de la restriction de  $f$  à  $x^*$  et on la note  $df_x : \Sigma_x(\mathcal{I}) \rightarrow \Sigma_{f(x)}(\mathcal{J})$ . C'est un morphisme d'immeubles vectoriels.

Si  $\vec{v} \in \Sigma_x(\mathcal{I})$ , soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $x + \varepsilon \vec{v} \in x^*$  alors  $f(x + \varepsilon \vec{v}) \in f(x)^*$ . On a

$$df_x(\vec{v}) = \frac{1}{\varepsilon} \overrightarrow{f(x)f(x + \varepsilon \vec{v})}.$$

**Propriété.** Soient  $A$  un appartement,  $c$  une alcôve et  $\rho = \rho_{A,c}$  la rétraction sur  $A$  centrée en  $c$ . Si  $x \in A$  alors  $d\rho_x = \rho_{\overrightarrow{Ax}, \vec{c}_x}$ , où  $\vec{c}_x$  est la chambre de  $\overrightarrow{Ax}$  qui contient tous les  $\overrightarrow{xy}$ ,  $y \in c$  (autrement dit  $\vec{c}_x = \overrightarrow{proj_x(c)}$ , si  $proj_x(c)$  est l'alcôve de  $x^*$  à distance minimale de  $c$ ).

Si  $x \notin A$ , soit  $B \supset c \cup \{x\}$  un autre appartement, soit  $\varphi : B \xrightarrow{\simeq} A$  l'isomorphisme qui fixe  $c$  et  $x$ , alors  $d\rho_x = d\varphi_x \circ \rho_{\overrightarrow{Bx}, \vec{c}_x}$ . En effet  $\rho = \varphi \circ \rho_{B,c}$ .

### 4.1.3 Critère local

**Proposition 4.1.** Soit  $[z, x, x_1, \dots, x_n, y, z]$  un polygone dans un appartement  $A$ . Soit  $\pi : [0, 1] \rightarrow A$  une paramétrisation (linéaire par morceaux et à vitesse constante) de  $[x, x_1, \dots, x_n, y]$  avec  $x_i = \pi(t_i)$ . Soit  $a$  une alcôve contenant  $z$  et soit  $\rho = \rho_{A,a}$  la rétraction sur  $A$  centrée en  $a$ .

Alors  $[z, x, x_1, \dots, x_n, y, z]$  est l'image par  $\rho$  d'un triangle  $[z, x, \tilde{y}, z]$  si, et seulement si, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $[\overrightarrow{x_i z}, -\pi'_-(t_i), 0_{x_i}, \pi'_+(t_i), \overrightarrow{x_i z}]$  est l'image d'un triangle  $[\overrightarrow{x_i z}, -\pi'_-(t_i), \eta_i, \overrightarrow{x_i z}]$  dans  $\Sigma_{x_i}(\mathcal{I})$  par  $\rho_{\overrightarrow{Ax_i}, \vec{a}_{x_i}}$ , où  $\vec{a}_{x_i}$  est la chambre de  $\overrightarrow{Ax_i}$  qui contient tous les vecteurs  $x_i z'$ ,  $z' \in a$ .

**Remarque.** La condition est équivalente au fait que pour tout  $i$ , il existe  $\eta_i \in \Sigma_{x_i}(\mathcal{I})$  tel que  $\eta_i$  est opposé à  $-\pi'_- = -\pi'_-(t_i)$  et  $\rho(\eta_i) = \pi'_+(t_i)$ .

*Démonstration.* On suppose pour simplifier qu'il existe un groupe  $\mathbf{G}$  agissant sur  $\mathcal{I}$  fortement transitivement (c'est à dire transitivement sur les paires formées d'une alcôve dans un appartement). Cela nous suffit, car nous appliquerons tout ceci à la situation où  $\mathcal{I} = \mathcal{I}(G, \mathcal{K})$ , l'immeuble de Bruhat-Tits associé au groupe  $G$  sur le corps  $\mathcal{K}$ . Après avoir démontré la proposition 4.5, on peut voir que cette hypothèse est inutile.

*Pliage.* On suppose que  $[z, x, x_1, \dots, x_n, y, z]$  est l'image par  $\rho$  d'un triangle  $[z, x, \tilde{y}, z]$ . Soit  $\tilde{\pi} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{I}$  une paramétrisation de  $[x, \tilde{y}]$  telle que  $\rho \circ \tilde{\pi} = \pi$ . Pour tout  $i$ , posons  $\tilde{x}_i = \tilde{\pi}(t_i)$  de sorte que  $x_i = \rho(\tilde{x}_i)$ . On dérive en  $t_i$  :

$$d\rho_{\tilde{x}_i}(\pm \tilde{\pi}'_{\pm}(t_i)) = \pm \pi'_{\pm}(t_i), \quad d\rho_{\tilde{x}_i}(\overrightarrow{\tilde{x}_i z}) = \overrightarrow{x_i z}.$$

Soit  $Z$  un appartement contenant  $a, \tilde{x}_i$  et tel que  $-\tilde{\pi}'_-(t_i) \in \overrightarrow{Z\tilde{x}_i}$ . Soit  $g \in \mathbf{G}$  tel que  $g \cdot Z = A$  et  $g \cdot a = a$ . Alors,  $\rho|_Z = g|_Z$ . On prend  $\eta_i = dg_{\tilde{x}_i}(\tilde{\pi}'_+(t_i))$ ;  $dg_{\tilde{x}_i}$  est un isomorphisme entre  $\Sigma_{\tilde{x}_i}\mathcal{I}$  et  $\Sigma_{x_i}\mathcal{I}$ , d'où  $\eta_i$  est opposé à  $-\pi'_-(t_i)$ . Il reste à montrer que  $\rho_{\overrightarrow{Ax_i}, \vec{a}_{x_i}}(\eta_i) = \pi'_+(t_i)$ .

Soit  $Y$  un appartement contenant  $a, \tilde{x}_i$  et tel que  $\tilde{\pi}'_+(t_i) \in \overrightarrow{Y\tilde{x}_i}$ . On a des isomorphismes :

$$Y \xrightarrow[a]{g} gY \xrightarrow[a]{\varphi, \simeq} A,$$

(cette notation signifie que  $g$  et  $\varphi$  fixent  $a$ )

L'isomorphisme  $\varphi$  est égal à  $\rho|_{gY}$  et la composée à  $\rho|_Y$ . On dérive :

$$\overrightarrow{Y\tilde{x}_i} \xrightarrow{dg} \overrightarrow{gY\tilde{x}_i} \xrightarrow{d\varphi} \overrightarrow{Ax_i},$$

la composée est égale à  $d\rho_{\tilde{x}_i}$  et  $\tilde{\pi}'_+(t_i) \mapsto \eta_i \mapsto d\rho_{\tilde{x}_i}(\tilde{\pi}'_+(t_i)) = \pi'_+(t_i)$ . Or  $d\varphi_{\tilde{x}_i} : \overrightarrow{gY\tilde{x}_i} \rightarrow \overrightarrow{Ax_i}$  est aussi égal à  $\rho_{\overrightarrow{Ax_i}, \vec{a}_{x_i}}$ , donc c'est gagné!

*Dépliage.* On suppose qu'il existe, pour tout  $i$ ,  $\eta_i \in \Sigma_{x_i}\mathcal{I}$  satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Soit  $B_1$  un appartement contenant  $a \cup \{x_1\}$  tel que  $\eta_1 \in \overrightarrow{B_1 x_1}$ . On pose  $\tilde{x}_2 = x_1 + \lambda \eta_1 \in B_1$ , où  $\lambda$  est tel que  $\lambda \|\eta_1\| = \|\overrightarrow{x_1 x_2}\|$ . Notons  $\varphi_1$  l'isomorphisme  $B_1 \xrightarrow[a]{\simeq} A$ . Alors  $(d\varphi_1)_{x_1}(\eta_1) = \pi'_+(t_1)$  car  $(d\varphi_1)_{x_1} = (\rho_{\overrightarrow{Ax_1}, \vec{a}_{x_1}})|_{\overrightarrow{B_1}}$ . Donc  $\varphi_1(x_1 + \lambda \eta_1) = x_1 + d\varphi_1(\lambda \eta_1) = x_1 + \lambda \pi'_+(t_1) = x_2$ . Et  $\overrightarrow{x_1 x_2}$  est opposé à  $\eta_1$  dans  $\Sigma_{x_1}\mathcal{I}$ , donc  $[x, x_1, \tilde{x}_2]$  est un segment dans  $\mathcal{I}$ .

Soit  $g_1 \in \mathbf{G}$  tel que  $g_1 \cdot A = B_1$  et  $g_1 \cdot a = a$ . On pose  $\tilde{x}_3 = \tilde{x}_2 + \lambda_2 dg_1(\eta_2)$  dans un appartement  $B_2 \dots$ . On construit de la sorte  $\tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}$  pour fabriquer un triangle.  $\square$

## 4.2 Pliage

Soit  $\mathcal{S}$  un immeuble sphérique de groupe de Weyl  $W^v$  ; on le considère dans sa réalisation vectorielle, comme  $\Sigma_x(\mathcal{I})$  en 4.1.1. Soient  $\xi \in \mathcal{S}$ ,  $\eta$  opposé à  $\xi$ ,  $-C$  une chambre et  $A$  un appartement contenant  $\xi$  et  $-C$ . On note  $\rho = \rho_{A,-C}$  la rétraction sur  $A$  centrée en  $-C$ . Le but de cette partie est de trouver une relation entre  $\xi$ ,  $-C$  et  $\rho(\eta)$  (HR(0) ci-dessous).

**Rappel.** La notion de  $W^v$ -chaîne (cf. 2.5) dépend du choix de la chambre de Weyl  $C^v$ . On la reprend ici en explicitant la chambre dans le nom :

Une  $(W^v, -C)$ -chaîne ou  $(-C)$ -chaîne de  $op_A(\xi)$  à  $\rho(\eta)$  est une suite

$$op_A(\xi), \tau_1 op_A(\xi), \tau_2 \tau_1 op_A(\xi), \dots, \rho(\eta) = \tau_n \cdots \tau_2 \tau_1 op_A(\xi),$$

où chaque  $\tau_i$  est une réflexion de  $A$  qui éloigne  $\tau_{i-1} \cdots \tau_2 \tau_1 op_A(\xi)$  de  $-C$ , c'est-à-dire :

$$\tau_{i-1} \cdots \tau_2 \tau_1 op_A(\xi), -C \quad |_{M_i} \quad \tau_i \tau_{i-1} \cdots \tau_2 \tau_1 op_A(\xi),$$

où  $M_i$  est le mur associé à la réflexion  $\tau_i$ .

(Cette notation signifie que les termes de gauche sont d'un côté du mur  $M_i$  et le terme de droite de l'autre côté.)

**Définition 4.2.** Soit  $\Gamma$  une galerie minimale de  $-C$  à  $\rho(\eta)$ ,  $\Gamma = (-C = C_0, C_1, \dots, C_n \ni \rho(\eta))$ . Soit  $\tau_i$  la réflexion qui échange  $C_{i-1}$  et  $C_i$ . Une chaîne de longueur  $\ell$  le long de  $\Gamma$  de  $op_A(\xi)$  à  $\rho(\eta)$  est une  $(-C)$ -chaîne de  $op_A(\xi)$  à  $\rho(\eta)$  du type  $\rho(\eta) = \tau_{i_\ell} \cdots \tau_{i_1} op_A(\xi)$  avec  $i_1 < \cdots < i_\ell$ .

Soit maintenant une galerie minimale  $\Gamma = (C_0 = -C, C_1, \dots, C_n)$  de  $-C$  à  $\eta$ . Pour tout  $i$ , soit  $B_i$  un appartement contenant  $\xi$  et  $C_i$ . Notons  $\rho_i = \rho_{B_i, C_i}$  la rétraction centrée en  $C_i$  sur  $B_i$ . Bien évidemment, on prend  $B_0 = A$  et  $\rho_0 = \rho$ . De l'autre côté,  $B_n$  contient  $\xi$  et  $\eta$ , et  $\eta = op_{B_n} \xi$ .

**Lemme 4.3.** Pour  $i < j$ , on a  $(\rho_i)|_{\Gamma_{\geq j}} = \rho_i \circ (\rho_j)|_{\Gamma_{\geq j}}$ .

*Démonstration.* La galerie  $\theta = (C_0, \dots, C_j = \rho_j(C_j), \rho_j(C_{j+1}), \dots, \rho_j(C_n))$  est tendue. En effet,  $\rho_j(\theta) = \rho_j(\Gamma)$  est tendue car  $\rho_j$  est une rétraction centrée en une chambre de  $\Gamma$ . Ainsi,  $\theta$  est tendue car  $\rho_j$  réduit les distances.

Soit  $Y$  un appartement contenant  $\theta$ . De même, soit  $Y'$  un appartement contenant  $(C_0, \dots, C_i = \rho_i(C_i), \rho_{i+1}(C_{i+1}), \dots, \rho_i(C_n))$ . Et enfin, soit  $Z$  un appartement contenant  $\Gamma$ . On a :

$$Z \xrightarrow[\Gamma_{\leq j}]{\varphi_j, \simeq} Y \xrightarrow[\Gamma_{\leq i}]{\varphi_i, \simeq} Y'.$$

Ce qui donne  $\varphi_j(\Gamma_{\geq j}) = \rho_j(\Gamma_{\geq j})$  et  $(\varphi_j)|_{\Gamma_{\geq j}} = (\rho_j)|_{\Gamma_{\geq j}}$ . De même,  $\varphi_i \circ (\varphi_j)|_{\Gamma_{\geq i}} = (\rho_i)|_{\Gamma_{\geq i}}$ . Et enfin,  $(\varphi_i)|_{\Gamma_{\geq i}} = (\rho_i)|_{\Gamma_{\geq i}}$ . D'où,  $(\rho_i)|_{\Gamma_{\geq j}} = \rho_i \circ (\rho_j)|_{\Gamma_{\geq j}}$ .  $\square$

Dans les conditions de ce numéro 4.2, on veut montrer les résultats suivants :

**HR(i).** Il existe une chaîne le long de  $\rho_i(\Gamma_{\geq i})$  (c'est donc une  $C_i$ -chaîne) de  $op_{B_i} \xi$  à  $\rho_i(\eta)$ .

L'hypothèse HR(n) est trivialement vraie. On suppose HR(i+1), montrons HR(i). Il y a deux cas.

*Cas 1.* Il existe un appartement  $Y$  contenant  $C_i$ ,  $\xi$  et le demi-appartement  $D_{B_{i+1}}(m_i, C_{i+1})$  de  $B_{i+1}$  contenant  $C_{i+1}$  et dont le mur  $M_i$  contient la cloison  $m_i = C_i \cap C_{i+1}$ . (C'est le cas si  $\xi \in D_{B_{i+1}}(m_i, C_{i+1})$  ou si  $C_i \in B_{i+1}$  et dans ce cas  $Y = B_{i+1}$  convient.)

Comme  $(C_i, C_{i+1}, \rho_{i+1}(C_{i+2}), \dots, \rho_{i+1}(C_n))$  est une galerie tendue, elle ne coupe le mur  $M_i$  qu'une seule fois. Donc,  $(C_{i+1}, \rho_{i+1}(C_{i+2}), \dots, \rho_{i+1}(C_n)) \subset D_{B_{i+1}}(m_i, C_{i+1})$ . Et il existe des isomorphismes

$$B_{i+1} \xrightarrow[\xi, \rho_{i+1}(\Gamma_{\geq i+1})]{\simeq} Y \xrightarrow[\xi, C_i]{(\rho_i)|_Y, \simeq} B_i ;$$

par le Lemme 4.3,  $\rho_i$  transforme  $\rho_{i+1}(\Gamma_{\geq i+1})$  en  $\rho_i(\Gamma_{\geq i+1})$ . On a la chaîne suivante dans  $B_{i+1}$  le long de  $\rho_{i+1}(\Gamma_{\geq i+1})$  :

$$\rho_{i+1}(\eta) = \tau_{i_k} \cdots \tau_{i_1} op_{B_{i+1}} \xi .$$

Par les deux isomorphismes précédents, on a

$$\rho_i(\eta) = \tau'_{i_k} \cdots \tau'_{i_1} op_{B_i} \xi ,$$

où  $\tau'_{i_j}$  est la réflexion dans  $B_i$  selon la  $i_j$ -ième cloison de  $\rho_i(\Gamma)$ . C'est bien une chaîne de  $op_{B_i} \xi$  à  $\rho_i(\eta)$  le long de  $\rho_i(\Gamma_{\geq i})$ .

*Cas 2.* La chambre  $C_i$  n'est pas dans  $B_{i+1}$  et, dans  $B_{i+1}$ , on a :

$$\xi \quad |_{M_i} \quad (C_{i+1}, \rho_{i+1}(C_{i+2}), \dots, \rho_{i+1}(C_n)) .$$

L'intersection  $B_i \cap B_{i+1}$  contient  $\xi$  et  $m_i$  et donc l'enclos  $Cl(\xi, m_i)$ . Or  $\xi \notin M_i$  donc  $Cl(\xi, m_i)$  est de dimension maximale ; c'est l'adhérence de la réunion des galeries minimales de  $\xi$  à  $m_i$ .

Soit  $d = proj_{m_i}(\xi)$ , c'est une chambre, elle est adjacente à  $C_i$  dans  $B_i$  et à  $C_{i+1}$  dans  $B_{i+1}$ . Autrement dit,  $d = \sigma_i(C_{i+1}) = \rho_i(C_{i+1})$  avec  $\sigma_i$  la réflexion selon  $M_i$  dans  $B_{i+1}$ . Soit  $Y$  un appartement contenant  $D_{B_{i+1}}(m_i, C_{i+1}) \cup C_i$ . On a les isomorphismes suivants :

$$B_{i+1} \xrightarrow[\rho_{i+1}(\Gamma_{\geq i+1})]{\simeq} Y \xrightarrow[C_i]{(\rho_i)|_Y, \simeq} B_i ;$$

on note  $\varphi$  la composée, elle envoie  $\rho_{i+1}(\Gamma_{\geq i+1})$  sur  $\rho_i(\Gamma_{\geq i+1})$ . La chaîne dans  $B_{i+1}$ ,  $\rho_{i+1}(\eta) = \tau_{i_k} \cdots \tau_{i_1}(op_{B_{i+1}} \xi)$  devient  $\rho_i(\eta) = \varphi \tau_{i_k} \varphi^{-1} \cdots \varphi \tau_{i_1} \varphi^{-1} \varphi(op_{B_{i+1}} \xi)$ . Or  $\tau'_{i_k} = \varphi \tau_{i_k} \varphi^{-1}$  est la réflexion selon la  $i_k$ -ième cloison de  $\rho_i(\Gamma)$  et  $\varphi(op_{B_{i+1}} \xi) = op_{B_i} \varphi(\xi) = op_{B_i} \sigma'_i(\xi)$ , car  $\varphi|_{B_{i+1} \cap B_i} = (\sigma'_i)|_{B_{i+1} \cap B_i}$ , où  $\sigma'_i$  est la réflexion selon  $m_i$  dans  $B_i$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \rho_i(\eta) &= \tau'_{i_k} \cdots \tau'_{i_1}(op_{B_i} \sigma'_i(\xi)) \\ &= \tau'_{i_k} \cdots \tau'_{i_1} \sigma'_i(op_{B_i} \xi) \end{aligned}$$

est une chaîne le long de  $\rho_i(\Gamma_{\geq i})$  dans  $B_i$ . □

### 4.3 Dépliage

Soit  $\mathcal{S}$  un immeuble sphérique épais (dans sa réalisation vectorielle et auquel on pense comme l'immeuble tangent à  $\mathcal{I}$  en un point  $\pi(t)$ ). Soient  $\xi, \pi'_+$  deux points de  $\mathcal{S}$  et  $A$  un appartement les contenant, ainsi qu'une chambre, notée  $-C$ . Comme précédemment,  $\rho$  désigne la rétraction sur  $A$  de centre  $-C$ .

On suppose qu'il existe  $\Gamma = (C_0 = -C, C_1, \dots, C_n)$  une galerie minimale de  $-C$  à  $\pi'_+$  et une chaîne le long de  $\Gamma$  de  $op_A \xi$  à  $\pi'_+$  de longueur  $l$ .

**Proposition 4.4.** *Il existe  $\eta \in \mathcal{S}$  tel que  $\rho(\eta) = \pi'_+$  et  $\eta$  est opposé à  $\xi$ .*

*Démonstration.* On raisonne par récurrence, la conclusion cherchée est la condition  $\text{HR}(\ell)$  ci-dessous.

**HR(i).** Il existe un appartement  $B_i$  contenant  $\xi$ , il existe  $\eta_i \in B_i$  tel que  $\rho(\eta_i) = \pi'_+$ , il existe une galerie minimale  $\Gamma_i$  de  $-C$  à  $\eta_i$  qui est dans  $B_i$  à partir d'un certain rang  $k_i$  telle que  $\rho(\Gamma_i) = \Gamma$ , et il existe une chaîne le long de  $(\Gamma_i)_{\geq k_i}$  de  $\text{op}_{B_i}\xi$  à  $\eta_i$  de longueur  $\ell - i$ .

$\text{HR}(0)$  est vraie pour  $B_0 = A$ . Si on a  $\text{HR}(i)$ , notons  $\Gamma_i = (-C = D_0, \dots, D_n)$  la galerie minimale et  $\eta_i = \tau_{i_u} \cdots \tau_{i_1} \text{op}_{B_i}\xi$  la chaîne le long de  $(\Gamma_i)_{\geq k_i}$  avec  $\tau_{i_j}$  la réflexion selon le mur  $M_{i_j}$  contenant la  $i_j$ -ième cloison  $m_{i_j}$  de  $\Gamma_i$  et  $u = \ell - i$ . On a

$$\text{op}_{B_i}\xi, D_{k_i}, D_{i_1} \quad |_{M_{i_1}} \quad \xi, \eta_i, (D_{i_1+1}, \dots, D_n) .$$

Soit  $\mathcal{D}$  un demi-appartement sortant de  $B_i$  le long du mur  $M_{i_1}$ , il existe car  $\mathcal{S}$  est épais. On pose  $B_{i+1} = \mathcal{D} \cup D_{B_i}(m_{i_1}, \xi)$ ,  $Z = \mathcal{D} \cup D_{B_i}(m_{i_1}, D_{k_i})$  et on note  $\varphi_Z : B_i \rightarrow Z$  l'isomorphisme fixant  $D_{B_i}(m_{i_1}, D_{k_i})$ . On prend

$$\Gamma_{i+1} = (D_0, \dots, D_{i_1}, \varphi_Z(D_{i_1+1}), \dots, \varphi_Z(D_n))$$

et  $\eta_{i+1} = \varphi_Z(\eta_i)$ . Remarquons que  $\Gamma_{i+1} = (D_0, \dots, D_{k_i-1}, \varphi_Z(D_{k_i}), \dots, \varphi_Z(D_n))$ . Par hypothèse de récurrence  $\Gamma_i$  est tendue, du coup  $\rho_{B_i, D_{i_1}}(\Gamma_{i+1}) = \rho_{B_i, D_{i_1}}(\Gamma_i)$  l'est aussi, et donc de même pour  $\Gamma_{i+1}$ . Par le Lemme 4.3, on a  $\rho|_{\Gamma_{i+1}, \geq i_1} = \rho \circ (\rho_{B_i, D_{i_1}})|_{\Gamma_{i+1}, \geq i_1}$ . D'où  $\rho(\Gamma_{i+1}, \geq i_1) = \rho(\Gamma_i, \geq i_1) = \Gamma_{\geq i_1}$  et  $\rho(\eta_{i+1}) = \rho(\eta_i) = \pi'_+$ .

Par  $\varphi_Z$  la chaîne de l'hypothèse de récurrence devient  $\eta_{i+1} = \varphi_Z(\eta_i) = \tau'_{i_u} \cdots \tau'_{i_2} \varphi_Z \tau_{i_1} \text{op}_{B_i}\xi$ , avec  $\tau'_{i_j}$  la réflexion selon la  $i_j$ -ième cloison de  $\Gamma_{i+1}$  dans  $Z$ . On a  $\eta_{i+1} = \tau'_{i_u} \cdots \tau'_{i_1} \text{op}_Z \varphi_Z(\xi)$ . Notons  $\psi : Z \rightarrow B_{i+1}$  l'isomorphisme qui fixe le demi-appartement  $\mathcal{D}$ . En composant par  $\psi$ , on obtient  $\eta_{i+1} = \tau''_{i_u} \cdots \tau''_{i_1} \text{op}_{B_{i+1}} \psi \circ \varphi_Z(\xi)$ , avec  $\tau''_{i_j} = \psi \tau'_{i_j} \psi^{-1}$ . Or  $\text{op}_{B_{i+1}}(\psi \circ \varphi_Z(\xi)) = \tau''_{i_1} \text{op}_{B_{i+1}}(\xi)$ . Donc  $\eta_{i+1} = \tau''_{i_u} \cdots \tau''_{i_2} \text{op}_{B_{i+1}}(\xi)$  et c'est encore une chaîne le long de  $(\Gamma_{i+1})_{\geq i_1+1}$ . En effet, dans  $B_i$ , pour tout  $j$ , on avait

$$\tau_{i_{j-1}} \cdots \tau_{i_1} \text{op}_{B_i}(\xi), D_{k_i}, \dots, D_{i_j} \quad |_{M_{i_j}} \quad \tau_{i_j} \cdots \tau_{i_1} \text{op}_{B_i}(\xi), D_{i_{j+1}}, \dots, D_n .$$

Par  $\psi \circ \varphi_Z$ , on a, pour  $j \geq 2$ , les positions suivantes dans  $B_{i+1}$  (avec  $M'_{i_j} = \psi \circ \varphi_Z(M_{i_j})$ ) :

$$\tau''_{i_{j-1}} \cdots \tau''_{i_2} \text{op}_{B_{i+1}}(\xi), \varphi_Z(D_{i_1+1}), \dots, \varphi_Z(D_{i_j}) \quad |_{M'_{i_j}} \quad \tau''_{i_j} \cdots \tau''_{i_2} \text{op}_{B_{i+1}}(\xi), \varphi_Z(D_{i_{j+1}}), \dots, \varphi_Z(D_n) .$$

□

D'après le paragraphe 4.2 et la proposition 4.4, on a montré :

**Proposition 4.5.** *Dans un appartement  $A$  de l'immeuble  $\mathcal{S}$ , on considère des points  $\xi, \pi'_+$ , et une chambre  $-C$  ; on note  $\rho = \rho_{A, -C}$ . Alors il existe dans  $\mathcal{S}$  un point  $\eta$  opposé à  $\xi$  tel que  $\rho(\eta) = \pi'_+$  si, et seulement si, il existe une galerie minimale  $\Gamma$  de  $-C$  à  $\pi'_+$  et une chaîne le long de  $\Gamma$  de  $\text{op}_A\xi$  à  $\pi'_+$ .*

#### 4.4 Galeries pliées positivement

On garde les mêmes notations qu'en 4.3 ci-dessus.

**Proposition 4.6.** *Il existe une  $-C$ -chaîne de  $\text{op}_A\xi$  à  $\pi'_+$  si, et seulement si, il existe une chaîne de  $\text{op}_A\xi$  à  $\pi'_+$  le long d'une galerie minimale de  $-C$  à  $\pi'_+$ .*



*Démonstration.* Il suffit de montrer que l'existence d'une  $-C$ -chaîne de  $op_A\xi$  à  $\pi'_+$  implique celle d'une chaîne de  $op_A\xi$  à  $\pi'_+$  le long d'une galerie minimale de  $-C$  à  $\pi'_+$ .

Pour cela, on dira qu'une galerie  $\delta = (D_0, D_1, \dots, D_n)$  de type  $(k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$  dans  $A$  est pliée positivement par rapport à une chambre  $D$  si, en notant  $M_j$  le mur de  $D_j$  de type  $k_j$  (commun à  $D_j$  et  $D_{j+1}$ ), on a

$$D_j = D_{j+1} \implies D \mid_{M_j} D_j = D_{j+1} .$$

Pour une chambre  $D$  et  $\lambda \in \mathcal{S}$ , on note  $w(D, \lambda)$  l'élément de  $W^v$  de plus petite longueur tel que  $\lambda \in w(D, \lambda).D$

Soit  $C_\xi = proj_\xi(-C)$  dans  $A$ . Soit  $\Gamma$  une galerie minimale de  $-C$  à  $\pi'_+$ . Comme il existe une  $-C$ -chaîne de  $op_A\xi$  à  $\pi'_+$ ,  $w(-C, op_A\xi) \leq w(-C, \pi'_+)$  et donc il existe une galerie  $\gamma = (C_0 = -C, C_1, \dots, C_n)$  de même type que  $\Gamma$  de  $-C$  à  $op_A\xi$ . On veut montrer qu'on peut supposer  $\gamma$  pliée positivement par rapport à  $C_\xi$ .

Si  $\gamma$  ne l'est pas, soit  $j$  le plus petit indice tel qu'on soit dans la situation :  $C_\xi, C_j = C_{j+1} \mid_{M_j}$ . Alors, comme  $\gamma$  aboutit à  $op_A\xi$ , cette galerie va traverser le mur  $M_j$  après l'indice  $j$  ou finir dans ce mur. Posons  $j_{max} = \max\{k \in ]j, n] \mid M_k = M_j \text{ ou } op_A\xi \in M_k\}$ . On définit une nouvelle galerie  $\lambda = (L_0, \dots, L_n)$  par

$$L_k = \begin{cases} C_k & \text{si } k \leq j \\ s_{M_j} C_k & \text{si } j+1 \leq k \leq j_{max} \\ C_k & \text{si } k > j_{max} . \end{cases}$$

Ainsi  $\lambda$  devient pliée positivement par rapport à  $C_\xi$  en  $M_j$  et reste de même type que  $\Gamma$ . On recommence cette procédure avec  $\lambda$  et ainsi de suite... Au final, on obtient une galerie  $\delta = (-C = D_0, \dots, D_n)$  pliée positivement par rapport à  $C_\xi$  entre  $-C$  et  $op_A\xi$ .

Notons  $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$  les indices (ordonnés de manière croissante) où la galerie  $\delta$  est pliée. Alors,

$$\begin{aligned} \pi'_+ &= s_{M_{i_1}} \cdots s_{M_{i_{r-1}}} s_{M_{i_r}} (s_{M_{i_1}} \cdots s_{M_{i_{r-1}}})^{-1} \cdots (s_{M_{i_1}} s_{M_{i_2}} s_{M_{i_1}}) s_{M_{i_1}} op_A\xi \\ &= s_{M_{i_1}} \cdots s_{M_{i_r}} op_A\xi \\ &= \tau_{i_r} \cdots \tau_{i_1} op_A\xi , \end{aligned}$$

où  $\tau_{i_j} = s_{M_{i_1}} \cdots s_{M_{i_{j-1}}} s_{M_{i_j}} (s_{M_{i_1}} \cdots s_{M_{i_{j-1}}})^{-1}$ . A chaque étape, on s'éloigne de  $-C$  et on déplie la galerie  $\delta$ . En effet, après le premier dépliage, on a :

$$-C, D_1, \dots, D_{i_1} \mid_{M_{i_1}} \tau_{i_1}(D_{i_1+1}), \tau_{i_1}(op_A\xi), \xi$$

car  $\delta$  est pliée positivement par rapport à  $C_\xi$ . La galerie

$$\delta^1 = (-C = D_0, \dots, D_{i_1}, \tau_{i_1}(D_{i_1+1}), \dots, \tau_{i_1}(D_{i_2}), \tau_{i_1}(D_{i_2+1}), \dots, \tau_{i_1}(D_n))$$

est, jusqu'à l'indice  $i_2$ , minimale et donc égale à  $\Gamma_{\leq i_2}$ . De plus, on sait que

$$op_A\xi, D_{i_2+1} = D_{i_2} \mid_{M_{i_2}} C_\xi, \xi ,$$

en appliquant  $\tau_{i_1}$  on obtient

$$\tau_{i_1} op_A\xi, \tau_{i_1} D_{i_2+1} = \tau_{i_1} D_{i_2} \mid_{\tau_{i_1} M_{i_2}} \tau_{i_1} \xi .$$

Donc,  $-C, \tau_{i_1} op_A\xi, \tau_{i_1} D_{i_2+1} = \tau_{i_1} D_{i_2}$  sont du même côté de  $\tau_{i_1} M_{i_2}$ . Ainsi quand on déplie une deuxième fois par rapport à  $\tau_{i_1} M_{i_2}$ , on s'éloigne de  $-C$ . On a donc obtenu une chaîne de  $op_A\xi$  à  $\pi'_+$  le long de la galerie minimale  $\gamma$  de  $-C$  à  $\pi'_+$ .  $\square$

## 4.5 Conclusion

D'après les propositions 4.1, 4.5 et 4.6, on a :

**Théorème 4.7.** *Soient  $[z, x, x_1, \dots, x_n, y, z]$  un polygone dans un appartement  $A$  de  $\mathcal{I}$ ,  $\pi : [0, 1] \rightarrow A$  une paramétrisation (linéaire par morceaux et à vitesse constante) de  $[x, x_1, \dots, x_n, y]$  avec  $x_i = \pi(t_i)$ ,  $\mathfrak{a}$  une alcôve contenant  $z$  et  $\rho = \rho_{A, \mathfrak{a}}$  la rétraction sur  $A$  centrée en  $\mathfrak{a}$ .*

*Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $\vec{a}_{x_i}$  la chambre de  $\vec{Ax_i}$  qui contient tous les vecteurs  $\vec{x_i z'}$  pour  $z' \in \mathfrak{a}$ .*

*Alors  $[z, x, x_1, \dots, x_n, y, z]$  est l'image par  $\rho$  d'un triangle  $[z, x, \tilde{y}, z]$  de  $\mathcal{I}$  si et seulement si, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , il existe une  $(W_{\pi(t_i)}^v, \vec{a}_{x_i})$ -chaîne de  $\pi'_-(t_i)$  à  $\pi'_+(t_i)$ .*

On notera la différence avec un chemin de Hecke (section 2.5). On dira qu'un chemin  $\pi$  vérifiant la condition ci-dessus est de Hecke par rapport à l'alcôve  $\mathfrak{a}$ .

**Remarques 4.8.** 1) *Soient  $x$  un sommet spécial de l'alcôve  $\mathfrak{a}$  et  $Q$  le quartier de sommet  $x$  opposé à  $\mathfrak{a}$ . Un chemin  $\pi$  entièrement contenu dans  $Q$  est de Hecke (par rapport à  $-C^v$  où  $C^v$  est la direction de  $Q$ ) si et seulement si il est de Hecke par rapport à  $\mathfrak{a}$ .*

2) *Les théorèmes 2.7 et 4.7 ainsi que la remarque précédente prouvent l'étape 1) du schéma de démonstration du théorème 1.1. En effet le chemin de Hecke  $N\lambda + \pi$  de  $N\lambda$  à  $N\nu^*$  reste dans la chambre de Weyl  $C^v$ ; il est donc de Hecke par rapport à l'alcôve  $\mathfrak{a}_-$  (contenant 0 et opposée à  $C^v$ ). En dépliant le polygone  $[0, N\lambda, \pi, N\nu^*, 0]$  on obtient le triangle cherché dans  $\mathcal{I}$ .*

**Corollaire 4.9.** *L'ensemble  $\mathcal{T}$  des triplets  $(\lambda, \mu, \nu) \in (P^{v+})^3$  tels qu'il existe dans  $\mathcal{I}$  un triangle  $[z, x, y, z]$  avec comme longueurs de côtés  $\lambda = d_{C^v}(z, x)$ ,  $\mu = d_{C^v}(x, y)$  et  $\nu = d_{C^v}(y, z)$  ne dépend que de l'appartement  $\mathbb{A}$  et non de  $\mathcal{I}$ .*

*Cet ensemble  $\mathcal{T}(\mathbb{A})$  est stable par homothétie par  $\mathbb{N}$ .*

*Si  $\mathbb{A}'$  est un appartement affine (ou vectoriel) associé au même couple  $(V, W^v)$ , mais avec un ensemble de murs  $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ , alors  $\mathcal{T}(\mathbb{A}') \subset \mathcal{T}(\mathbb{A})$ .*

*Démonstration.*  $\mathcal{T}$  est l'ensemble des  $(\lambda, \mu, \nu) \in (P^{v+})^3$  tels qu'il existe dans  $\mathbb{A}$  un bon polygone (i.e. vérifiant la condition du théorème)  $[z, x, x_1, \dots, x_n, y, z]$  avec  $\lambda = d_{C^v}(z, x)$ ,  $\nu = d_{C^v}(y, z)$  et  $\pi$  de type  $\mu$ . Il ne dépend donc que de  $\mathbb{A}$  et contient  $\mathcal{T}(\mathbb{A}')$ . Si  $z_0$  est un sommet spécial d'une alcôve contenant  $z$ , une homothétie de rapport  $n \in \mathbb{N}$  et centre  $z_0$  transforme un bon polygone associé à  $(\lambda, \mu, \nu)$  en un bon polygone associé à  $(n\lambda, n\mu, n\nu)$ ; d'où la seconde assertion.  $\square$

**N.B.** On verra dans la section 5 (5.15) que le cône  $\mathcal{T}$  est saturé dans  $(P^{v+})^3$ .

## 5 Applications de Gauss et configurations semi-stables

### 5.1 Le bord visuel de $\mathcal{I}$

On rappelle que l'immeuble  $\mathcal{I}$  est un espace métrique complet dont on notera la distance  $d$ . Il est muni de son système complet d'appartements. Ainsi tout sous-ensemble convexe isométrique à une partie de  $\mathbb{R}^n$  est contenu dans un appartement [1, 11.53].

Les résultats suivants résultent essentiellement de ce que  $\mathcal{I}$  est un espace CAT(0) complet. Pour la plupart des démonstrations on se reportera à [3].

#### 5.1.1 Rayons et points idéaux

Un rayon (ou une demi-droite) dans  $\mathcal{I}$  est un sous-ensemble  $\rho$  isométrique à  $[0, \infty[$ . On confondra dans la suite le rayon et l'isométrie  $[0, \infty[ \rightarrow \mathcal{I}$ . Le point  $x = \rho(0)$  est appelé l'origine de  $\rho$  ou la base. Un rayon est convexe, il est donc contenu dans un appartement  $A$  de  $\mathcal{I}$ . Et dans  $A$ , il est de la forme  $\{(1-t)x + ty \mid t \geq 0\}$  pour  $x \neq y$  dans  $A$ .

On dit que deux rayons  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont asymptotes (ou parallèles) si la fonction (convexe)  $t \mapsto d(\rho_1(t), \rho_2(t))$  est bornée. On vérifie que ceci définit une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence de rayons est un point idéal de  $\mathcal{I}$  (ou point à l'infini).

Par rapport aux espaces CAT(0) généraux, beaucoup des démonstrations des résultats de cette section sont simplifiées par les faits suivants :

- étant données deux demi-droites  $\rho, \sigma$  il existe des sous-demi-droites  $\rho', \sigma'$  contenues dans un même appartement,
- si de plus  $\mathfrak{a}$  est une alcôve ou un germe de quartier et  $\rho, \sigma$  sont asymptotes, il existe des demi-droites  $\rho_0 \subset \rho, \rho_1, \dots, \rho_n \subset \sigma$  deux à deux asymptotes et telles que,  $\forall i, \mathfrak{a}, \rho_i$  et  $\rho_{i+1}$  soient contenus dans un même appartement.

La démonstration du lemme suivant est classique.

**Lemme 5.1.** *Soient  $x$  un point de  $\mathcal{I}$  et  $\xi$  un point à l'infini. Alors il existe un unique rayon  $\rho$  de base  $x$  représentant  $\xi$ . On le notera  $[x, \xi)$ .*

On note  $\partial_\infty \mathcal{I}$  l'ensemble des points à l'infini. Soit  $F$  une face d'un quartier  $\mathfrak{Q} = x + C$ , on note  $F_\infty$  l'ensemble des points à l'infini  $\xi$  tels que  $F$  contienne le rayon  $[x, \xi)$ . Une facette à l'infini  $\mathfrak{f}$  est un sous-ensemble de  $\partial_\infty \mathcal{I}$  tel que  $\mathfrak{f} = F_\infty$  pour  $F$  une face de quartier.

Les résultats suivant sont classiques

**Lemme 5.2.** *1) Si  $\mathfrak{f}$  est une facette à l'infini et  $x$  un point de  $\mathcal{I}$ , alors il existe une face de quartier  $F$  basée en  $x$  telle que  $F_\infty = \mathfrak{f}$ . Ainsi, il y a une bijection entre les facettes à l'infini et les faces de quartier basées en tout point  $x$ .*

*2) Deux quartiers de  $\mathcal{I}$  donnent la même facette à l'infini si, et seulement si, ils sont équipollents, c'est à dire correspondent au même germe.*

*3) Les intérieurs relatifs des facettes à l'infini forment une partition de  $\partial_\infty \mathcal{I}$ .*

#### 5.1.2 Structure d'immeuble

On définit une relation entre les facettes à l'infini :  $\mathfrak{f}'$  est une face de  $\mathfrak{f}$  si pour tout point  $x$  de  $\mathcal{I}$ , la face de quartier  $F'$  associée à  $\mathfrak{f}'$  est une face de  $F$ , la face associée à  $\mathfrak{f}$ ; comme on a considéré des facettes fermées cela équivaut à  $\mathfrak{f}' \subset \mathfrak{f}$ . Pour un appartement  $A$  de  $\mathcal{I}$ , on note  $A_\infty$  l'ensemble des facettes à l'infini données par les faces de quartiers de  $A$ . Cet ensemble est un

complexe simplicial et est stable par passage aux faces. En fait, c'est un complexe isomorphe au complexe de Coxeter associé à  $(W^v, S)$ .

Le lemme 5.2 permet de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 5.3.** *Soit  $I_\infty$  l'ensemble des facettes à l'infini de  $\mathcal{I}$ .  $I_\infty$  est un immeuble sphérique, ses appartements sont en bijection avec ceux de  $\mathcal{I}$ . De plus, sa réalisation géométrique est en bijection avec  $\partial_\infty \mathcal{I}$ .*

Dans notre cas  $\mathcal{I}$  est l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe réductif sur un corps non archimédien complet, alors  $I_\infty$  est l'immeuble de Tits de ce groupe (dont les faces correspondent bijectivement aux sous-groupes paraboliques).

**Remarque 5.4.** *On peut étendre la topologie de  $\mathcal{I}$  à  $\bar{\mathcal{I}} = \mathcal{I} \amalg \partial_\infty \mathcal{I}$  en une topologie appelée la topologie conique et alors, si  $\mathcal{I}$  est localement fini,  $\bar{\mathcal{I}}$  est une compactification de  $\mathcal{I}$ . Une base d'ouverts de cette topologie est formée des ouverts de  $\mathcal{I}$  et des ensembles de la forme  $C_x(\xi, \varepsilon) = \{\eta \in \bar{\mathcal{I}} \mid \eta \neq x, \angle_x(\eta, \xi) < \varepsilon\}$ , où  $x \in \mathcal{I}$ ,  $\xi \in \partial_\infty \mathcal{I}$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $\angle_x(\eta, \xi)$  est l'angle dans un appartement contenant  $x$  et le début des deux géodésiques  $[x, \xi]$  et  $[x, \eta]$  (si  $\eta \in \partial_\infty \mathcal{I}$  cela coïncide avec la définition ci-dessous).*

*Cela dit, la topologie sur  $\partial_\infty \mathcal{I}$  qui va nous intéresser est celle de la distance de Tits*

### 5.1.3 Angles et distance de Tits

Soient  $x$  un point de  $\mathcal{I}$ ,  $\xi_1$  et  $\xi_2$  deux points à l'infini. On pose  $\rho_1 = [x, \xi_1]$  et  $\rho_2 = [x, \xi_2]$ . On considère le triangle  $T(t) = T(x, \rho_1(t), \rho_2(t))$  dans  $\mathcal{I}$  et le triangle  $\tilde{T}(t) = T(\tilde{x}, \tilde{\rho}_1(t), \tilde{\rho}_2(t))$  dans  $\mathbb{R}^2$  "de comparaison", c'est à dire dont les côtés ont la même longueur que ceux de  $T(t)$  (la condition CAT(0) dit que l'application évidente de  $\tilde{T}(t)$  dans  $T(t)$  diminue les distances). On note  $\tilde{\alpha}(t)$  l'angle en  $\tilde{x}$  de ce triangle  $\tilde{T}(t)$ . Quand  $t$  tend vers 0,  $\tilde{\alpha}(t)$  décroît continûment et donc la limite existe, on pose

$$\angle_x(\xi_1, \xi_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\alpha}(t).$$

Cette limite est égale à  $\angle_x(\rho_1(t), \rho_2(t))$  dès que  $t$  est assez petit pour que tous les points de  $T(t)$  soient dans un même appartement. Ainsi, si  $T(x, y, z)$  est un triangle géodésique dans  $\mathcal{I}$ ,  $\angle_x(y, z)$  est défini de manière analogue et on a  $\angle_x(y, z) \leq \angle_{\tilde{x}}(\tilde{y}, \tilde{z})$ , où  $T(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  est un triangle de comparaison dans  $\mathbb{R}^2$  (conséquence facile de CAT(0)).

Maintenant, on définit la distance de Tits sur  $\partial_\infty \mathcal{I}$  comme

$$\angle_{Tits}(\xi_1, \xi_2) = \sup_{x \in \mathcal{I}} \angle_x(\xi_1, \xi_2).$$

Par définition,  $\angle_{Tits}(\xi_1, \xi_2) \geq \angle_x(\xi_1, \xi_2)$  pour tous  $x \in \mathcal{I}$ ,  $\xi_1, \xi_2 \in \partial_\infty \mathcal{I}$ .

**Exemple 5.5.** *Si  $\mathcal{I}$  est un arbre, alors  $\angle_x(\xi_1, \xi_2) = 0$  ou  $\pi$  et donc  $\angle_{Tits}(\xi_1, \xi_2) = \pi$ , toujours ! Par contre, en rang supérieur, cette distance peut prendre toutes les valeurs entre 0 et  $\pi$ .*

**Lemme 5.6.** *Soient  $\xi, \eta \in \partial_\infty \mathcal{I}$  et  $\rho$  un représentant de  $\xi$ . On pose  $\varphi(t) = \angle_{\rho(t)}(\xi, \eta)$ . Alors,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \angle_{Tits}(\xi, \eta)$ .*

**Théorème 5.7.** *L'espace métrique  $(\partial_\infty \mathcal{I}, \angle_{Tits})$  est complet.*

## 5.2 Des triangles aux configurations semi-stables

On cherche à réaliser l'étape 2 de l'introduction et donc à construire une configuration semi-stable associée à un triangle de  $\mathcal{I}$ , cf. [10].

### 5.2.1 Fonctions de Busemann

On peut plonger  $\mathcal{I}$  dans l'espace  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{I}, \mathbb{R})/\mathbb{R}$  des fonctions continues sur  $\mathcal{I}$  (avec la topologie de la convergence uniforme sur les bornés), quotienté par les constantes : à  $x \in \mathcal{I}$  on associe la fonction  $d(x, -)$ . On peut montrer [3, II 8.13] que  $\overline{\mathcal{I}}$  est homéomorphe à l'adhérence  $\widehat{\mathcal{I}}$  de  $\mathcal{I}$  dans  $\mathcal{F}$ . On ne va utiliser que le plongement de  $\partial_\infty \mathcal{I}$  dans  $\mathcal{F}$  :

Soient  $x \in \mathcal{I}$ ,  $\xi \in \partial_\infty \mathcal{I}$  et  $\rho$  un représentant de  $\xi$ . L'application  $[0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto d(x, \rho(t)) - t$  est minorée (par  $-d(x, \rho(0))$ ) et décroissante ; on peut donc noter

$$b_\xi(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d(x, \rho(t)) - t)$$

Cette fonction  $b_\xi$  de  $\mathcal{I}$  dans  $\mathbb{R}$  est la fonction de Busemann associée à  $\xi$  (ou plutôt à  $\rho$ ).

Elle ne dépend du choix de  $\rho$  qu'à une constante près et est 1-Lipschitzienne en  $x$ . On peut montrer que  $b_\xi$  est la limite de  $\rho(t)$  dans  $\mathcal{F}$ . Ainsi la classe de  $b_\xi$  dans  $\mathcal{F}$  est en fait dans  $\widehat{\mathcal{I}}$  et ne dépend que de  $\xi$ . Les lignes de niveau de  $b_\xi$  sont les horosphères de centre  $\xi$ .

**Exemple 5.8.** Si les points  $x, y$  et la demi-droite  $\rho$  sont dans un même appartement  $A$  et si  $\vec{\xi} = \frac{d}{dt}(\rho(t))$  est le vecteur directeur unitaire de  $\rho$ , on a :  $b_\xi(x) - b_\xi(y) = \vec{x}\vec{y} \cdot \vec{\xi} = -d(x, y) \cos(\vec{y}\vec{x}, \vec{\xi})$ . Les horosphères (en tout cas leurs intersections avec  $A$ ) sont donc des hyperplans orthogonaux à  $\rho$ .

**Lemme 5.9.** Soient  $\sigma$  une géodésique (parcourue à vitesse 1) d'extrémité  $\eta \in \overline{\mathcal{I}}$  et  $t \in \mathbb{R}$  tels que  $\sigma(t) \neq \eta$ , alors la dérivée directionnelle de  $b_\xi$  selon  $\eta$  en  $t$  vaut :  $\frac{d}{dt^+}(b_\xi \circ \sigma)(t) = -\cos \angle_{\sigma(t)}(\eta, \xi)$ .

*Démonstration.* C'est un exercice facile de géométrie euclidienne dans un appartement contenant le début de la géodésique de  $\sigma(t)$  à  $\eta$  et la demi-droite  $[\sigma(t), \xi[$ .  $\square$

**Lemme 5.10.** Soient  $\xi, \eta \in \partial_\infty \mathcal{I}$  et  $\sigma$  une demi-droite représentant  $\eta$ . La pente asymptotique de  $b_\xi$  en  $\eta$  est  $\text{pente}_\xi(\eta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b_\xi(\sigma(t))}{t}$ . Elle s'exprime avec la distance de Tits :  $\text{pente}_\xi(\eta) = -\cos \angle_{Tits}(\xi, \eta)$ .

*Démonstration.* Si  $\rho$  est une demi-droite représentant  $\xi$ , on vérifie que  $\frac{b_\xi(\sigma(t))}{t}$  ne dépend asymptotiquement pas des choix des représentants  $\rho$  et  $\sigma$ . On peut alors raisonner dans un appartement contenant ces deux géodésiques.  $\square$

### 5.2.2 Configurations pondérées et stabilité

On considère trois points  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \partial_\infty \mathcal{I}$  et trois poids  $m_1, m_2, m_3 \in [0, +\infty[$ . On les voit comme une configuration pondérée  $\psi : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \nu) \rightarrow \partial_\infty \mathcal{I}$ , où  $\nu$  est la mesure sur  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  de masse  $m_i$  en  $i$ .

La mesure associée sur  $\partial_\infty \mathcal{I}$  est  $\mu = \psi_* \nu = \sum_i m_i \delta_{\xi_i}$ , de poids total  $|\mu| = m_1 + m_2 + m_3$ . On définit sa pente :  $\text{pente}_\mu = -\sum_{i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} m_i \cos \angle_{Tits}(\xi_i, -)$ , c'est une fonction sur  $\partial_\infty \mathcal{I}$ .

**Définition 5.11.** La mesure  $\mu$  et la configuration  $\psi$  sont dits *semi-stables* si la fonction pente $_\mu$  est positive ou nulle sur  $\partial_\infty \mathcal{I}$ .

Intuitivement cela signifie que les points  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  sont éloignés les uns des autres. Par exemple si  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$  aucune configuration n'est semi-stable ; dans un arbre, si  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  sont deux à deux différents (resp.  $\xi_1 = \xi_2 \neq \xi_3$ ) la configuration est semi-stable si et seulement si  $2m_i \leq m_1 + m_2 + m_3, \forall i$  (resp.  $m_3 = m_1 + m_2$ ).

Bien sûr une configuration semi-stable le reste si on multiplie tous ses poids par un même réel positif : les configurations semi-stables forment un cône (saturé).

La pente peut se réinterpréter avec les fonctions de Busemann : la fonction de Busemann pondérée associée à  $\mu$  ou  $\psi$  est  $b_\mu = \sum_i m_i b_{\xi_i}$ , elle est définie à une constante près. Si  $\eta \in \partial_\infty \mathcal{I}$  est représenté par  $\sigma$ , alors le lemme 5.10 dit que :  $\text{pente}_\mu(\eta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b_\mu(\sigma(t))}{t}$ .

### 5.2.3 Application de Gauss

Soit  $T = T(x_1, x_2, x_3)$  un triangle dans  $\mathcal{I}$ . On prolonge chaque segment  $[x_{i-1}, x_i]$  en une demi-droite d'origine  $x_{i-1}$ , d'extrémité notée  $\xi_i \in \partial_\infty \mathcal{I}$  et on considère les poids  $m_i = d(x_{i-1}, x_i)$ . L'application de Gauss  $\psi$  associe donc au triangle  $T$  une configuration pondérée  $\psi_T$  (bien sûr il y a plusieurs choix pour  $\psi_T$ ).

**Proposition 5.12.** La configuration  $\psi_T$  est semi-stable.

*Démonstration.* Soient  $\eta \in \partial_\infty \mathcal{I}$  et  $\gamma_i : [0, m_i] \rightarrow [x_{i-1}, x_i]$  une paramétrisation à vitesse 1 de ce segment. D'après le lemme 5.9 et 5.1.3 on a :  $\frac{d}{dt+}(b_\eta \circ \gamma_i)(t) = -\cos \angle_{\sigma_i(t)}(\eta, \xi_i) \leq -\cos \angle_{Tits}(\eta, \xi_i)$ . Ainsi  $b_\eta(x_i) - b_\eta(x_{i-1}) = \int_0^{m_i} \frac{d}{dt+}(b_\eta \circ \gamma_i)(t) dt \leq \int_0^{m_i} -\cos \angle_{Tits}(\eta, \xi_i) = -m_i \cos \angle_{Tits}(\eta, \xi_i)$  et donc  $0 \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} -m_i \cos \angle_{Tits}(\eta, \xi_i)$ .  $\square$

## 5.3 Des configurations semi-stables aux triangles

On cherche à réaliser l'étape 3 de l'introduction et donc à inverser l'application de Gauss ci-dessus en construisant un triangle dans  $\mathcal{I}$  à partir d'une configuration semi-stable  $\psi = ((\xi_1, m_1), (\xi_2, m_2), (\xi_3, m_3))$ , cf. [10].

### 5.3.1 Points fixes

Soient  $\xi \in \partial_\infty \mathcal{I}$  et  $t \geq 0$ . On définit l'application  $\phi_{\xi,t} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}, x \mapsto \rho(t)$  où  $\rho$  est le représentant de  $\xi$  issu de  $x$ . La fonction  $t \mapsto d(\phi_{\xi,t}(x), \phi_{\xi,t}(y))$  est convexe, bornée et décroissante.

Si  $\psi = ((\xi_1, m_1), (\xi_2, m_2), (\xi_3, m_3))$  est une configuration pondérée, on lui associe l'application  $\phi = \phi_{\xi_3, m_3} \circ \phi_{\xi_2, m_2} \circ \phi_{\xi_1, m_1}$  de  $\mathcal{I}$  dans  $\mathcal{I}$ . Par construction  $d(x, \phi x) \leq |\mu| = m_1 + m_2 + m_3$  et  $d(\phi(x), \phi(y)) \leq d(x, y)$ .

On cherche un point fixe  $x_0$  de  $\phi$  qui définirait un triangle  $T = T(x_0, x_1, x_2)$  (avec  $x_1 = \phi_{\xi_1, m_1}(x_0)$  et  $x_2 = \phi_{\xi_2, m_2}(x_1)$ ) vérifiant  $\psi_T = \psi$ .

Pour cela on va utiliser une variante du lemme de point fixe de Bruhat-Tits [10] :

**Lemme 5.13.** Soit  $\phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$  une application 1-Lipschitzienne d'un espace  $CAT(0)$  complet dans lui-même. S'il existe  $x \in \mathcal{I}$  tel que  $\{\phi^n(x) \mid n \geq 0\}$  est borné, alors  $\phi$  a un point fixe dans  $\mathcal{I}$ .

*Démonstration.* On pose  $x_n = \phi^n(x)$  et, pour  $y \in \mathcal{I}$ ,  $r(y) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y)$ . Alors  $r(\phi y) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \phi y) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(\phi x_{n-1}, \phi y) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_{n-1}, y) = r(y)$ ; donc  $r \circ \phi \leq r$ . Il suffit donc de montrer que  $r$  a un unique minimum dans  $\mathcal{I}$ .

On note  $\rho = \inf_{\mathcal{I}}(r)$ . Pour  $\epsilon > 0$  et  $y, y' \in \mathcal{I}$  tels que  $r(y), r(y') < \rho + \epsilon$ , il existe  $n_0$  tel que  $d(x_n, y), d(x_n, y') < \rho + \epsilon$ ,  $\forall n \geq n_0$ . Si  $m$  est le milieu du segment  $[y, y']$  on a  $r(m) \geq \rho$ , donc  $d(x_n, m) > \rho - \epsilon$  pour une infinité de  $n \in \mathbb{N}$ . L'inégalité (CN) de [5, 3.2.1] (conséquence de la condition CAT(0)) s'écrit alors, pour ces entiers  $n$  :  $d(y, y')^2 \leq 2(d(x_n, y)^2 + d(x_n, y')^2) - 4d(x_n, m)^2 < 16\rho\epsilon$ . Ainsi une suite  $y_n \in \mathcal{I}$  telle que  $r(y_n)$  tende vers  $\rho$  est forcément de Cauchy. Comme  $\mathcal{I}$  est complet, cela montre l'existence et l'unicité d'un  $y \in \mathcal{I}$  tel que  $r(y) = \rho$ .  $\square$

### 5.3.2 Le cône sur l'immeuble à l'infini

L'immeuble sphérique  $I_\infty$  de réalisation géométrique sphérique  $\partial_\infty \mathcal{I}$  a aussi une réalisation vectorielle (dans le même sens qu'en 4.1.1) : c'est le cône  $C\partial_\infty \mathcal{I}$  quotient de  $[0, +\infty[ \times \partial_\infty \mathcal{I}$  par la relation qui identifie  $\{0\} \times \partial_\infty \mathcal{I}$  à un seul point noté 0. C'est un espace métrique pour la distance  $d_C((a, \xi), (b, \eta))^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle_{Tits}(\xi, \eta)$ .

On montre [3, p. 60, 61, 188] que  $C\partial_\infty \mathcal{I}$  est complet, que deux points sont toujours joints par un unique segment géodésique et qu'il vérifie la condition CAT(0). C'est un immeuble vectoriel.

En fait dans notre cas  $C\partial_\infty \mathcal{I}$  est l'immeuble de Tits d'un groupe réductif, dans sa réalisation vectorielle et on sait qu'il a toutes les propriétés des immeubles affines plus une, qui caractérise les immeubles vectoriels : les appartements sont des espaces vectoriels euclidiens d'origine 0 (commune à tous les appartements).

On peut remplacer, dans ce qui précède,  $\mathcal{I}$  par  $C\partial_\infty \mathcal{I}$  et donc considérer  $\phi$  sur ce dernier immeuble.

**Théorème 5.14.** *Si la configuration  $\psi$  est semi-stable, alors l'application  $\phi$  admet un point fixe dans  $C\partial_\infty \mathcal{I}$ .*

*Démonstration.* [10, prop. 4.5] Nous sommes dans un immeuble vectoriel que l'on notera  $\mathcal{I}^v$ , ses facettes sont des faces de quartier de sommet 0 et elles correspondent bijectivement (par  $F \mapsto F^\infty$ ) aux facettes de  $\partial_\infty \mathcal{I} = \partial_\infty \mathcal{I}^v$ . On normalise toutes les fonctions de Busemann de façon que  $b_\xi(0) = 0$ . Comme deux facettes sont toujours dans un même appartement, on peut appliquer le calcul de l'exemple 5.8 à 0,  $x \in \mathcal{I}^v$  et  $\xi \in \partial_\infty \mathcal{I}$ , ainsi  $b_\xi(x) = -d(0, x) \cos \angle_0(x, \xi)$ . En particulier  $|b_\xi(x)| \leq d(0, x)$  et  $d(0, x) = \max_{\xi \in \partial_\infty \mathcal{I}} (-b_\xi(x))$ .

Si  $F$  est une facette de  $\mathcal{I}^v$ , on note  $F^*$  son étoile c'est à dire la réunion des facettes (fermées) contenant  $F$ . Si  $x \in F^*$ ,  $\eta \in F^\infty$  et  $\xi \in \partial_\infty \mathcal{I}$ , alors  $x, \eta$  et  $\xi$  sont dans un même appartement et  $\phi_{\xi, t}(x)$  est le translaté de  $x$  d'une longueur  $t$  dans la direction  $\xi$ . On a donc  $b_\eta(\phi_{\xi, t}(x)) - b_\eta(x) = -t \cos \angle_{Tits}(\xi, \eta)$  d'après 5.8. On définit l'ensemble  $F^{*\circ}$  des  $x \in F^*$  tels que la boule  $B(x, |\mu|)$  de  $\mathcal{I}^v$  soit contenue dans  $F^*$ . Ainsi, pour  $x \in F^{*\circ}$ ,  $\phi_{\xi_1, t}(x)$  (pour  $0 \leq t \leq m_1$ ),  $\phi_{\xi_2, t}(\phi_{\xi_1, m_1}(x))$  (pour  $0 \leq t \leq m_2$ ) et  $\phi_{\xi_3, t}(\phi_{\xi_2, m_2}(\phi_{\xi_1, m_1}(x)))$  (pour  $0 \leq t \leq m_3$ ) restent dans  $F^*$  et on a donc : pour tous  $x \in F^{*\circ}$ ,  $\eta \in F^\infty$ ,  $b_\eta(\phi(x)) - b_\eta(x) = -\sum m_i \cos \angle_{Tits}(\xi_i, \eta) = \text{pente}_\mu(\eta)$ . Comme  $\mu$  est semi-stable, on en déduit que  $b_\eta(\phi(x)) \geq b_\eta(x)$ .

Pour appliquer le lemme 5.13 on veut montrer que  $\phi$  stabilise un borné; celui-ci sera l'approximation polyédrique d'une boule de centre 0 que l'on va construire maintenant.

Soit  $Q$  un quartier de sommet 0 dans  $\mathcal{I}^v$ , on va construire un sous-ensemble fini  $D$  de  $Q^\infty$ . Pour cela on met d'abord dans  $D$  le barycentre du simplexe  $Q^\infty$ , puis on ajoute successivement

des points des faces de  $Q^\infty$  (différentes de  $Q^\infty$ ) ordonnées de façon que la dimension décroisse : si  $F^\infty$  est une telle face, on rajoute au  $D_-(F^\infty)$  déjà construit un ensemble fini  $D(F^\infty)$  de points de l'intérieur relatif de  $F^\infty$  tel que  $F^\infty$  soit recouvert par les boules ouvertes (pour la distance de Tits) de centres ces points de  $D(F^\infty)$  et de rayon  $(1/3).d(F^\infty, D_-(F^\infty))$ . On note  $\epsilon(F^\infty)$  la distance de  $F^\infty$  au complémentaire de la réunion de ces boules.

Alors le  $D$  ainsi construit et  $\epsilon = (1/2) \inf\{\epsilon(F^\infty) \mid F^\infty \subset \partial Q^\infty\}$  vérifient la condition suivante : si  $\eta \in Q^\infty$  et  $\zeta \in D$  sont tels que  $\angle_{Tits}(\eta, \zeta) \leq 2\angle_{Tits}(\eta, \zeta')$  pour tous  $\zeta' \in D$ , alors  $\eta$  est à distance de Tits  $> \epsilon$  de toute face de  $Q^\infty$  ne contenant pas  $\zeta$ .

On considère l'ensemble  $E$  des points de  $\partial_\infty \mathcal{I}$  d'image dans  $D$  par la projection de  $\partial_\infty \mathcal{I}$  sur  $Q^\infty$  déterminée par les types. Alors la condition de l'alinéa précédent est encore vérifiée si l'on change  $Q^\infty$  en  $\partial_\infty \mathcal{I}$  et  $D$  en  $E$ .

On considère la fonction  $f = \max_{\zeta \in E}(-b_\zeta)$ . On a vu que  $|f| \leq d(0, -)$  ; de plus les boules polyédriques  $B_f(r) = \{x \in \mathcal{I}^v \mid f(x) \leq r\}$  sont bornées : cela se vérifie dans le quartier  $Q$  et  $\{x \in Q \mid -b_\zeta(x) \leq r, \forall \zeta \in D\}$  est borné d'après l'exemple 5.8. Il ne reste donc plus qu'à montrer que  $\phi$  stabilise  $B_f(r)$  pour  $r$  assez grand.

Soient  $r > 0$  et  $x \in \mathcal{I}^v$  tels que  $d(0, x) > r$ . Montrons que  $\forall \zeta \in E, -b_\zeta(\phi(x)) \leq f(x)$ .

– Si  $\angle_0(x, \zeta) \leq 2\angle_0(x, \zeta'), \forall \zeta' \in E$  et si  $F_\zeta^\infty$  est la facette contenant  $\zeta$  dans son intérieur relatif, alors  $x \in F_\zeta^{*\circ}$  pour  $r \geq |\mu|/\sin \epsilon$ . On a alors  $-b_\zeta(\phi(x)) \leq -b_\eta(x) \leq f(x)$ .

– Si  $p = \angle_0(x, \zeta) > 2\angle_0(x, \zeta') = 2q$  pour un  $\zeta' \in E$ , on peut supposer  $\angle_0(x, \zeta') = \min\{\angle_0(x, \zeta'') \mid \zeta'' \in E\}$ . Alors  $\angle_{Tits}(\zeta, \zeta') \leq p+q \leq 3(p-q)$  et, si on note  $\theta = \inf\{\angle_{Tits}(\xi, \eta) \mid \xi \neq \eta \in E\} = \inf\{\angle_{Tits}(\xi, \eta) \mid \xi \neq \eta \in D\} > 0$  on a  $\theta \leq p+q \leq 3(p-q)$ . Alors  $f(x) = -b_{\zeta'}(x) = -b_\zeta(x) + d(0, x)(\cos q - \cos p) = -b_\zeta(x) + 2d(0, x) \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2} \geq -b_\zeta(x) + |\mu|$ , si  $2r \inf\{\sin(\theta/2), \sin(3\pi/4)\} \cdot \sin(\theta/6) \geq |\mu|$ . Et alors, comme  $b_\zeta$  est 1-Lipschitzienne et  $\phi$  de déplacement au plus  $|\mu|$ , on a  $-b_\zeta(\phi(x)) \leq -b_\zeta(x) + |\mu| \leq f(x)$ .

On a donc  $f(\phi(x)) \leq f(x)$  si  $d(0, x) > r$  avec  $r > r_0$  (assez grand). Mais  $\phi(B(0, r)) \subset B(0, r + |\mu|) \subset B_f(r + |\mu|)$ . Donc  $B_f(r)$  est stable par  $\phi$  pour  $r > r_0 + |\mu|$ .  $\square$

### 5.3.3 L'argument de transfert

Nous venons de trouver un point fixe de  $\phi$  dans l'immeuble vectoriel  $\mathcal{I}^v$  correspondant à  $\partial_\infty \mathcal{I}$ . On a donc dans  $\mathcal{I}^v$  un triangle de longueurs (numériques) de côtés  $m_1, m_2, m_3$  et de directions de côtés  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \partial_\infty \mathcal{I}$ .

Identifions  $C^v$  à un quartier  $Q$  d'origine 0 de  $\mathcal{I}^v$  et considérons les éléments  $\lambda, \mu, \nu$  de  $C^v$  de longueurs numériques respectives  $m_1, m_2, m_3$  et de directions respectives les images de  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  dans  $Q^\infty$  par la projection de  $\partial_\infty \mathcal{I}$  sur  $Q^\infty$ . On dira que  $\lambda = pr_{C^v}(\xi_1, m_1)$  et, de même,  $\mu = pr_{C^v}(\xi_2, m_2)$ ,  $\nu = pr_{C^v}(\xi_3, m_3)$ . Ainsi le triangle ci-dessus a pour longueurs de côtés  $\lambda, \mu$  et  $\nu$ .

On est dans le cadre du corollaire 4.9 et le dernier alinéa de celui-ci nous dit qu'il existe dans  $\mathcal{I}$  un triangle de même longueurs de côtés. En effet l'appartement témoin  $\mathbb{A}^v$  de  $\mathcal{I}^v$  s'identifie, avec ses murs et son groupe de Weyl  $W^v$ , à l'appartement témoin  $\mathbb{A}$  de  $\mathcal{I}$ , si l'on ne garde dans ce dernier que les murs passant par un sommet spécial donné.

Cela signifie aussi que  $\phi$  a un point fixe dans  $\mathcal{I}$ .

**Proposition 5.15.** *Le cône  $\mathcal{T}$  du corollaire 4.9 est saturé dans  $(P^{V+})^3$ , i.e., s'il existe  $(\lambda, \mu, \nu) \in (P^{V+})^3$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  tels que  $(N\lambda, N\mu, N\nu) \in \mathcal{T}$ , alors  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathcal{T}$ .*

*Démonstration.* S'il existe un triangle de longueurs de côtés  $N\lambda, N\mu, N\nu$ , on lui associe une configuration semi-stable  $((\xi_1, m_1), (\xi_2, m_2), (\xi_3, m_3))$  avec  $N\lambda = pr_{C^v}(\xi_1, m_1)$ ,  $N\mu =$



$pr_{C^v}(\xi_2, m_2)$  et  $N\nu = pr_{C^v}(\xi_3, m_3)$ , cf. 5.12. la configuration  $((\xi_1, m_1/N), (\xi_2, m_2/N), (\xi_3, m_3/N))$  est encore semi-stable (5.2.2) et le raisonnement ci-dessus permet de lui associer un triangle dans  $\mathcal{I}$  de longueurs de côtés  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\nu$ .  $\square$

## 6 Le théorème de saturation

On fait le point sur les étapes de la démonstration du Théorème 1.1 qui sont déjà démontrées. L'étape 1) a été vue dans la section 4, voir la remarque 4.8.2. Les étapes 2) et 3) ont été démontrées dans la Section 5. Il reste à montrer les étapes 4) et 5).

On a une configuration semi-stable  $\xi = ((\xi_1, m_1), (\xi_2, m_2), (\xi_3, m_3))$  avec  $\lambda = pr_{C^v}(\xi_1, m_1)$ ,  $\mu = pr_{C^v}(\xi_2, m_2)$  et  $\nu = pr_{C^v}(\xi_3, m_3)$  dans  $P^{\vee+}$ ; on supposera dès le théorème 6.2 que  $\lambda + \mu + \nu \in Q^{\vee}$ .

### 6.1 Facteurs de saturation et action de $P^{\vee}/Q^{\vee}$

On note  $\theta$  la plus grande racine et  $m_i$  son coefficient sur la racine  $\alpha_i$ ,  $\theta = \sum_{i=1}^l m_i \alpha_i$ . L'alcôve fondamentale  $\mathfrak{a}$  est déterminée par les inéquations :

$$\alpha_i(v) \geq 0, \forall i = 1, \dots, l \quad ; \quad \theta(v) \leq 1.$$

Si on considère les poids fondamentaux  $\varpi_1, \dots, \varpi_l$  alors  $P^{\vee} = \oplus \mathbb{Z}\varpi_i$  et

$$\mathfrak{a} = \left\{ \sum x_i \varpi_i \mid x_i \geq 0, \sum_i x_i \leq 1 \right\}.$$

Les sommets de  $\mathfrak{a}$  sont donc  $(0, \dots, 0); (1/m_1, 0, \dots, 0); \dots; (0, \dots, 0, 1/m_l)$  dans la base  $(\varpi_1, \dots, \varpi_l)$ . De plus, on sait que  $P^{\vee}$  est simplement transitif sur les sommets spéciaux.

**Lemme 6.1.** *Le plus petit entier  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout sommet  $s$  de  $\mathbb{A}$ ,  $ks$  est un sommet spécial est l'entier  $k = k_{\Phi} = \text{ppcm}(m_1, \dots, m_l)$ .*

*Démonstration.* Si on teste sur les sommets de  $\mathfrak{a}$ , il est clair que  $k$  est comme indiqué. Mais  $Q^{\vee} \subset P^{\vee}$  est simplement transitif sur les alcôves donc  $Q^{\vee} \cdot \{\text{sommets de } \mathfrak{a}\} = \{\text{sommets de } \mathbb{A}\}$ . D'où le résultat.  $\square$

On s'intéresse maintenant à l'action de  $P^{\vee}$  sur  $\mathfrak{a}$ . Soit  $\lambda \in P^{\vee}$ , on note  $\tau_{\lambda}$  la translation associée. On pose  $\mathfrak{a}' = \tau_{\lambda}(\mathfrak{a})$ . Alors il existe un unique  $w_{\lambda} \in W^a$  tel que  $w_{\lambda}\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$ . On note  $\varphi_{\lambda} = w_{\lambda} \circ \tau_{\lambda}$ ; si  $\lambda \in Q^{\vee}$ ,  $\tau_{\lambda} \in W^a$  et  $\varphi_{\lambda} = Id$ . Si  $\mu$  est un autre élément de  $P^{\vee}$ , alors

$$\varphi_{\lambda}\varphi_{\mu} = w_{\lambda}\tau_{\lambda}w_{\mu}\tau_{\mu} = w_{\lambda}(\tau_{\lambda}w_{\mu}\tau_{\lambda}^{-1})\tau_{\lambda}\tau_{\mu} \in W^a\tau_{\lambda}\tau_{\mu}$$

et  $\varphi_{\lambda}\varphi_{\mu}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ . Donc  $\varphi_{\lambda}\varphi_{\mu} = \varphi_{\lambda+\mu}$ . Ce qui donne bien une action de  $P^{\vee}/Q^{\vee}$  sur l'alcôve  $\mathfrak{a}$ .

Comme le groupe est supposé presque simple, cette action se traduit par une permutation des sommets (ou des cloisons) de  $\mathfrak{a}$ , donc par une action sur le diagramme de Dynkin complété. Si on étiquette les sommets par les entiers  $m_i$  et qu'on met 1 pour celui qu'on rajoute, on peut

remarquer que  $P^\vee/Q^\vee$  agit simplement transitivement sur les sommets affectés d'un coefficient 1, c'est-à-dire, les sommets spéciaux de l'alcôve  $\mathfrak{a}$ .

**N.B.**  $\text{Aut}(\text{Dynkin complété}) = \text{Aut}(\text{Dynkin}) \ltimes (P^\vee/Q^\vee)$ .

On a donc des tables faciles à établir de  $k$  et de  $|P^\vee/Q^\vee|$  (notés  $k_R$  et  $i$  dans [11, p. 49]).

## 6.2 Le point fixe est un sommet

On sait que l'application  $\phi = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \phi_3$  associée à la configuration semi-stable  $\xi = ((\xi_1, m_1), (\xi_2, m_2), (\xi_3, m_3))$  admet un point fixe  $x_0$  dans  $\mathcal{I}$ . Mais dans un appartement contenant  $\xi_1$  et  $x$ ,  $\phi_1(x)$  est le translaté de  $x$  d'une longueur  $m_1$  dans la direction  $\xi_1$ , donc selon un vecteur  $\lambda' \in W^v \cdot \lambda$ . Or  $\lambda \in P^\vee$ , la translation associée  $\tau_\lambda$  envoie donc facettes sur facettes. Ainsi,  $\phi_1$  est une application simpliciale. De même pour  $\phi_2$  et  $\phi_3$ . De plus  $\tau_\lambda$  envoie une alcôve sur une alcôve et permute les types de facettes par l'action de  $\bar{\lambda} \in P^\vee/Q^\vee$ ; donc, si  $\lambda + \mu + \nu \in Q^\vee$ ,  $\phi$  conserve les types. Nous avons démontré le premier point du théorème suivant, le second est laissé à la sagacité du lecteur.

**Théorème 6.2** (Kapovich-Leeb-Millson [11]).

- Si  $\lambda + \mu + \nu \in Q^\vee$  alors  $\phi$  fixe un sommet.
- Si  $\phi$  fixe un sommet spécial alors  $\lambda + \mu + \nu \in Q^\vee$ .

On a donc un triangle  $T = T(x_0, x_1, x_2)$  dans  $\mathcal{I}$  avec  $d_{C^v}(x_0, x_1) = \lambda$ ,  $d_{C^v}(x_1, x_2) = \mu$  et  $d_{C^v}(x_2, x_0) = \nu$  et  $x_0$  un sommet de  $\mathcal{I}$ . Comme  $\lambda, \mu, \nu \in P^\vee$ ,  $x_1$  et  $x_2$  sont aussi des sommets. On peut supposer que  $x_0$  et  $x_1$  sont dans notre appartement témoin favori  $A$ . On choisit une alcôve  $\mathfrak{a}_0$  de  $A$  contenant  $x_0$ . On rétracte le triangle  $T$  sur l'appartement  $A$  par  $\rho_{A, \mathfrak{a}_0}$ . Alors, d'après les résultats de la section 4, on obtient un polygone  $P(x_0, x_1, y_1, \dots, y_n, x'_2)$ , où  $x'_2 = \rho_{\mathfrak{a}_0, A}(x_2)$  et  $P(x_1, y_1, \dots, y_n, x'_2)$  est un chemin de Hecke de type  $\mu$ .

Maintenant, on fait dans  $A$  une homothétie de centre 0 et de rapport  $k$ , alors le polygone  $P(x_0, x_1, y_1, \dots, y_n, x'_2)$  se transforme en un polygone  $P(x'_0, x'_1, y'_1, \dots, y'_n, x''_2)$ , où  $x'_0, x'_1, x''_2$  sont des sommets spéciaux de  $A$ ,  $d_{C^v}(x'_0, x'_1) = k\lambda$ ,  $d_{C^v}(x'_1, x'_2) = k\mu$  et  $d_{C^v}(x'_2, x'_0) = k\nu$  et  $P(x'_1, y'_1, \dots, y'_n, x''_2)$  est un chemin de Hecke de type  $k\mu$ . Malheureusement, en général, ce n'est pas un chemin LS... Mais, on a bien démontré l'étape 4).

## 6.3 Quand est-ce que Hecke vaut LS ?

La condition LS est un peu mystérieuse par rapport à Hecke. On utilise le lemme «grossier» suivant.

**Lemme 6.3.** Soit  $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}$  un chemin de Hecke (par rapport à  $-C^v$ ) de type  $\eta \in C^v \cap P^\vee = P^{\vee+}$ . Si les points où  $\pi$  est plié sont des sommets spéciaux, alors  $\pi$  est LS (et dans ce cas  $LS \Leftrightarrow \text{Hecke} \Leftrightarrow (\text{vrai}) \text{ billard plié positivement}$ ).

*Démonstration.* Pour tout  $t$ , il existe une suite  $\xi_0 = \pi'_-(t), \xi_1, \dots, \xi_m = \pi'_+(t)$  et des racines positives  $\beta_1, \dots, \beta_m$  telles que

$$(H1) \quad r_{\beta_i}(\xi_{i-1}) = \xi_i$$

$$(H2) \quad \beta_i(\xi_{i-1}) < 0$$

$$(H3) \quad r_{\beta_i} \in W_{\pi(t)}^v, \text{ i.e. } \beta_i(\pi(t)) \in \mathbb{Z}.$$

On note  $w_{\pm}(t) \in W^v$  l'élément de plus petite longueur tel que  $\pi'_{\pm}(t) = w_{\pm}(t)\eta$ . Alors, on a

$$w_{-}(t) = w_0 > w_1 = r_{\beta_1} w_0 > \cdots w_m = r_{\beta_m} w_{m-1} = w_{+}(t) .$$

D'après la proposition 2.4, il suffit de prouver la condition **(LS3)**. Mais, on sait que pour tout  $t$ ,  $w_{+}(t) \leq w_{-}(t)$ . Quand il y a égalité, il n'a rien à faire. Quand il n'y a pas égalité, comme les points où le chemin se plie sont des sommets spéciaux, on peut écrire

$$w_{+}(t) = r_{\beta'_p} \cdots r_{\beta'_1} w_{-}$$

avec décroissance de 1 des longueurs. Donc  $\pi$  est bien LS.  $\square$

Malheureusement, il n'est pas clair que, même après homothétie, un chemin de Hecke se plie en des sommets spéciaux. C'est la raison des définitions suivantes.

## 6.4 Les chemins LS généralisés

Soit  $\eta \in C^v \cap P^v$ , on choisit une décomposition  $\eta = \eta_1 + \cdots + \eta_l$  avec  $\eta_i \in \mathbb{N}\varpi_i \subset P^{v+}$ . Soit  $\pi_{\eta} = \pi_{\eta_1} \star \cdots \star \pi_{\eta_l}$  la concaténation des segments  $\pi_{\eta_1} = [0, \eta_1]$  et  $\pi_{\eta_i} = [\eta_1 + \cdots + \eta_{i-1}, \eta_1 + \cdots + \eta_i]$  pour  $i \geq 2$  (évidemment, ce chemin dépend de la décomposition de  $\eta$ ). Soit  $\mathfrak{a}$  une alcôve.

**Définition 6.4.** *Un chemin de Hecke (resp. LS) généralisé de type  $\eta$  (par rapport à  $-C^v$  ou à  $\mathfrak{a}$ ) est un chemin  $p = p_1 \star \cdots \star p_l$  où les  $p_i$  sont de Hecke (resp. LS) de type  $\eta_i$  (par rapport à  $-C^v$  ou à  $\mathfrak{a}$ ),  $p_i(0) = p_{i-1}(1)$  et pour tout  $1 \leq i \leq l$ , il existe un vecteur  $\xi_i$ , une chambre qui contient à la fois  $\xi_i$  et  $(p_i)'_{+}(0)$  et une  $(W_{p_i(0)}^v, \vec{a}_{p_i(0)})$ -chaîne de  $(p_i)'_{-}(0)$  à  $\xi_i$  (où  $\vec{a}_{p_i(0)}$  désigne  $-C^v$  ou la chambre définie dans le théorème 4.7).*

*Dans le cas LS, on suppose de plus que  $p_0(0)$  est spécial.*

Par exemple,  $\pi_{\eta}$  est un chemin LS généralisé de type  $\eta$ . De plus, on a les propriétés suivantes (démontrées par Kapovich et Millson et par Littellmann) pour les vrais chemins LS généralisés (i.e. par rapport à  $-C^v$ ) :

- L'ensemble des chemins LS généralisés de type  $\eta$  et d'origine 0 est stable par les opérateurs  $e_{\alpha}$  et  $f_{\alpha}$ .
- Le seul chemin LS généralisé de type  $\eta$  d'origine 0 et contenu dans  $C^v$  est  $\pi_{\eta}$ .
- Tout chemin LS généralisé de type  $\eta$  est le transformé, par des opérateurs  $f_{\alpha}$ , de  $\pi_{\eta}$ .
- Le théorème de Littellmann sur le produit tensoriel est toujours valable avec des chemins LS généralisés de type  $\eta$ .

On peut faire le lien entre ces chemins LS généralisés et les galeries LS. Il suffit de choisir dans 3.9 la galerie  $\gamma_{\eta}$  contenant le chemin  $\pi_{\eta}$  ci-dessus et non le segment  $[0, \eta]$ .

## 6.5 Conclusion

On va montrer ici l'étape 5. On considère le polygone  $P(x'_0, x'_1, y'_1, \dots, y'_n, x''_2)$  obtenu à la section 6.2, où  $x'_0, x'_1, x''_2$  sont des sommets spéciaux de  $A$ ,  $d_{C^v}(x'_0, x'_1) = k\lambda$ ,  $d_{C^v}(x''_2, x'_0) = k\nu$  et  $P(x'_1, y'_1, \dots, y'_n, x''_2)$  est un chemin de Hecke de type  $k\mu$  par rapport à une alcôve  $\mathfrak{a}_0$  contenant  $x_0$ . On redéploie le chemin dans l'immeuble pour obtenir un triangle sur des sommets spéciaux  $T(x'_0, x'_1, z_2)$  de longueurs de côtés  $(k\lambda, k\mu, k\nu)$ . Dans un appartement contenant les sommets  $x'_1$  et  $z_2$ , on remplace le segment  $[x'_1, z_2]$  par le chemin  $\pi = x'_1 + \pi_{\eta}$ , où  $\pi_{\eta}$  est le chemin associé ci-dessus à une décomposition de  $\eta = k\mu$ . Ce chemin n'emprunte que des arêtes et donc chaque fois qu'il rencontre un mur, c'est en un sommet.

On rétracte sur  $A$  par  $\rho = \rho_{A, \mathfrak{a}_0}$ . Alors on obtient un polygone  $P(x'_0, x'_1, z_1, \dots, z_m, x''_2)$  tel que  $\rho\pi = P(x'_1, z_1, \dots, z_m, x''_2)$  est un chemin qui est plié uniquement en des sommets et de Hecke généralisé de type  $\eta$  par rapport à  $\mathfrak{a}_0$ . C'est clair pour les images des segments de  $\pi$ . Pour les points anguleux, il faut remarquer que deux arêtes d'une même alcôve auront des images dans une même alcôve.

Comme  $x'_0$  est spécial, on peut supposer  $x'_0 = 0$ . On note  $C^v$  la chambre de Weyl opposée à  $\mathfrak{a}_0$ . On replie  $A$ , en accordéon, sur  $C^v$  par la projection  $pr_{C^v} : A \rightarrow C^v$ ; on obtient ainsi un polygone  $P(x'_0 = 0, x''_1, z'_1, \dots, z'_m, x'''_2)$  avec  $d_{C^v}(x'_0, x''_1) = k\lambda$  (i.e.  $x''_1 = k\lambda$ ),  $d_{C^v}(x'''_2, x'_0) = k\nu$  (i.e.  $x'''_2 = k\nu^*$ ) et  $p = P(x''_1, z'_1, \dots, z'_m, x'''_2)$  est un chemin plié uniquement en des sommets. D'après le lemme suivant  $p$  est de Hecke par rapport à  $\mathfrak{a}_0$  et donc de Hecke par rapport à  $-C^v$  (remarque 4.8.2).

Enfin, on applique l'homothétie de centre  $x'_0$  et de rapport  $k$ , on obtient un chemin de Hecke généralisé dont les coudes sont des sommets spéciaux. Par le lemme 6.3, ce chemin est LS généralisé; le théorème de décomposition 2.7 s'applique et prouve que  $(V(k^2\lambda) \otimes V(k^2\mu) \otimes V(k^2\nu))^{G^\vee} \neq \{0\}$ . On a bien achevé l'étape 5) et donc la démonstration du théorème de saturation 1.1

**Lemme 6.5.** *Soit  $\mathfrak{a}$  l'alcôve de  $A$  de sommet 0 et opposée à la chambre de Weyl  $C^v$ . Soit  $p$  un chemin de Hecke généralisé (ou non généralisé) de type  $\eta$  par rapport à  $\mathfrak{a}$  dans  $A$ . Alors le chemin replié  $pr_{C^v} \circ p$  est de Hecke généralisé (ou non généralisé) de type  $\eta$  par rapport à  $\mathfrak{a}$  dans  $C^v$ .*

*Démonstration.* Le chemin  $pr_{C^v} \circ p$  s'obtient à partir de  $p$  par une suite de pliages rétractant  $A$  sur un demi-appartement contenant  $C^v$  et de mur contenant 0. Soient donc  $M$  un mur contenant 0,  $D$  le demi-appartement limité par  $M$  contenant  $C^v$  et  $\pi_D$  le pliage de  $A$  sur  $D$ . On va montrer que  $\pi_D \circ p$  est de Hecke (généralisé) par rapport à  $\mathfrak{a}$ . Cela se vérifie en chaque point  $p(t)$  de  $p$ . Si  $p(t) \notin M$ , alors  $\vec{a}_{p(t)}$  contient  $\mathfrak{a}$  et sa symétrique  $s_M(\mathfrak{a})$ ; de plus, au voisinage de  $t$ ,  $\pi_D \circ p$  est égal à  $p$  ou à  $s_M \circ p$ . Donc  $\pi_D \circ p$  vérifie encore la condition locale imposée.

Supposons  $p(t) \in M$ . Par hypothèse il existe une  $(W_{p(t)}^v, \vec{a}_{p(t)})$ -chaîne de  $p'_-(t)$  à  $\xi$  où  $\xi$  est dans une même chambre que  $p'_+(t)$ . Donc  $\pi_D(\xi)$  et  $\pi_D(p'_+(t)) = (\pi_D \circ p)'_+(t)$  sont dans une même chambre et du même côté de  $M$ . Ainsi  $\pi_D(\xi)$  est égal à  $\xi$  ou  $s_M(\xi)$  avec comme positions :  $\xi, \vec{a}_{p(t)} \mid_M s_M(\xi)$ . De même  $(\pi_D \circ p)'_-(t)$  est égal à  $p'_-(t)$  ou à  $s_M(p'_-(t))$  avec cette fois :  $s_M(p'_-(t)), \vec{a}_{p(t)} \mid_M p'_-(t)$ . Ainsi en complétant éventuellement, par le début et/ou la fin, la  $(W_{p(t)}^v, \vec{a}_{p(t)})$ -chaîne de  $p'_-(t)$  à  $\xi$ , on obtient une  $(W_{p(t)}^v, \vec{a}_{p(t)})$ -chaîne de  $(\pi_D \circ p)'_-(t)$  à  $\pi_D(\xi)$ .  $\square$

## Références

- [1] P. Abramenko et K. S. Brown, *Buildings : Theory and applications*, Grad. Texts in Math. **248**, Springer-Verlag, New-York (2008).
- [2] P. Baumann et S. Gaussent, *On Mirković-Vilonen cycles and crystal combinatorics*, Represent. Theory **12** (2008), pp 83-130.

- [3] M. Bridson et A. Haefliger, *Metric spaces of non positive curvature*, Grundlehren der math. Wiss., **319**, Springer (1999).
- [4] K. S. Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, New-York (1989).
- [5] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local, I*, Publ. Math. I.H.E.S., **41**, (1972), pp. 5-252.
- [6] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local, II*, Publ. Math. I.H.E.S., **60**, (1984), pp. 5-184.
- [7] S. Gaussent et P. Littelmann, *LS-galleries, the path model, and MV-cycles*, Duke Math. J. **127**, (2005), pp. 35-88.
- [8] S. Gaussent et G. Rousseau, *Kac-Moody groups, hovels and Littelmann paths*, Annales Inst. Fourier **58**, (2008), pp. 2605-2657.
- [9] M. Kapovich, B. Leeb et J.J. Millson, *Convex functions on symmetric spaces, side lengths of polygons and stability inequalities for weighted configurations at infinity*, J. Diff. Geometry. **81**, (2009), pp. 297-354.
- [10] M. Kapovich, B. Leeb et J.J. Millson, *Polygons in buildings and their refined side lengths*, Geometric And Functional Analysis, à paraître.
- [11] M. Kapovich, B. Leeb et J.J. Millson, *Polygons in symmetric spaces and buildings with applications to algebra*, Memoir Amer. Math. Soc. **896** (2008).
- [12] M. Kapovich et J.J. Millson, *A path model for geodesics in euclidean buildings and its applications to representation theory*, Geometry, Groups and Dynamics **2**, (2008), pp. 405-480.
- [13] A. Knutson et T. Tao, *The honeycomb model of  $GL_n(\mathbb{C})$  tensor products. I Proof of the saturation conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **12**, (1999), pp. 1055-1090.
- [14] P. Littelmann, *A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras*, Inventiones Math. **116**, (1994), pp. 329-346.
- [15] P. Littelmann, *Paths and root operators in representation theory*, Annals of Math. **142**, (1995), pp. 499-525.
- [16] I. Mirković and K. Vilonen, *Perverse sheaves on affine Grassmannians and Langlands duality*, Math. Res. Lett. **7** (2000), 13-24.
- [17] M. Ronan, *Lectures on Buildings*, Academic Press, (1989).
- [18] J. Tits, *Buildings of spherical type and finite BN-pairs, Lecture notes in Math. 386*, Springer-Verlag, Heidelberg (1974).

Institut Élie Cartan, Unité Mixte de Recherche 7502, Nancy-Université, CNRS  
Boulevard des aiguillettes, BP 70239, 54506 Vandœuvre lès Nancy Cedex (France)  
Stephane.Gaussent@iecn.u-nancy.fr ; Nicole.Bardy@iecn.u-nancy.fr ;  
Cyril.Charignon@iecn.u-nancy.fr ; Guy.Rousseau@iecn.u-nancy.fr